Capitole speciale de geometrie pentru profesori

Camelia Frigioiu

Galaţi, 2010

Cuprins

1 Geometrie sintetică plană **1**

1.1 Concurenţa liniilor importante într-un triunghi 1

1.1.1 Concurenţa medianelor, mediatoarelor, bisectoarelor şi înălţimilor într-un triunghi 1

1.1.2 Cercul înscris în triunghi, cercul circumscris şi exânscris unui triunghi 6

1.2 Teoremele MENELAUS şi CEVA 11

1.2.1 Teorema lui Menelaus 11

1.2.2 Teorema lui Ceva 15

1.2.3 Teorema lui VAN AUBEL 16

1.3 Patrulatere inscriptibile 17

1.3.1 Teorema lui Ptolemeu 19

1.4 Patrulatere circumscriptibile 20

1.4.1 Cercul lui Euler 22

1.5 Probleme de coliniaritate 23

1.5.1 Metode de demonstrare a coliniarităţii unor puncte 23

1.5.2 Teorema lui Euler, dreapta lui Simpson 23

1.5.3 Relaţia lui Carnot 25

1.6 Probleme de concurenţă 27

1.6.1 Metode de demonstrare a concurenţei unor drepte 27

1.6.2 Teoremele lui Gergonne 28

1.6.3 Teorema lui Steiner 29

1.7 Relaţii metrice în triunghi şi patrulater 30

1.7.1 Teorema Pitagora generalizată 30

1.7.2 Relaţia lui Stewart 32

1.7.3 Teorema medianei 32

1.7.4 Relaţia lui Euler pentru patrulatere 33

2 Transformări geometrice **35**

2.1 Simetrii 37

2.2 Translaţia 44
2.3 Rotaţia în plan 47
2.4 Proprietăţi generale ale izometriilor 51
2.5 Asemănarea în plan. Proprietăţi generale 53
2.6 Omotetia în plan 55
2.6.1 Folosirea omotetiei la rezolvarea unor probleme de loc geometric 58
2.7 Inversiunea în plan 59

3 Geometrie în spaţiu **65**
3.1 Introducere în geometria tetraedrului 65
3.2 Tetraedre Crelle 77
3.3 Tetraedre echifaciale 79
3.4 Tetraedre ortocentrice 81
3.5 Probleme 84

4 APLICAŢII ALE NUMERELOR COMPLEXE ÎN GEOMETRIE **85**
4.1 Elemente de trigonometrie aplicate în geometrie 85
4.1.1 Aplicaţii practice 87
4.2 Numere complexe 89
4.3 Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie 90
4.4 Teoreme clasice de geometrie demonstrate cu ajutorul numerelor complexe 94
4.5 Probleme 97

Capitolul 1

Geometrie sintetică plană

Reamintim definiţiile unor elemente importante în triunghi.

DEFINIŢIA 1.1 *Numim bisectoare interioară a unui unghi al unui triunghi, dreapta care împarte unghiul în două unghiuri egale.*

DEFINIŢIA 1.2 *Numim înălţime a unui triunghi, dreapta care coboară perpendicular dintr-un vârf al triunghiului pe latura opusă a triunghiului.*

DEFINIŢIA 1.3 *Numim mediatoare a unui triunghi, perpendiculara construită pe mijlocul unei laturi a triunghiului.*

DEFINIŢIA 1.4 *Numim mediană a unui triunghi, dreapta care uneşte un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.*

1.1 Concurenţa liniilor importante într-un triunghi

Linii importante ale unui triunghi sunt:

1. medianele
2. bisectorele interioare ale unghiurilor triunghiului
3. mediatoarele laturilor triunghiului
4. înalţimile.

1.1.1 Concurenţa medianelor, mediatoarelor, bisectoarelor şi înălţimilor într-un triunghi

Într-un triunghi se poate demonstra pentru fiecare categorie de linii importante că sunt concurente şi anume:

1. cele trei mediatoare ale laturilor unui triunghi sunt concurente într-un punct care este **centrul cercului circumscris triunghiului**;

2. cele trei bisectoare interioare ale unui triunghi sunt concurente într-un punct care este **centrul cercului înscris în triunghi**;

3. cele trei înălţimi ale unui triunghi sunt concurente într-un punct care se numeşte **ortocentrul triunghiului**;

4. cele mediane ale unui triunghi sunt concurente într-un punct care se numeşte **centrul de greutate al triunghiului**.

În continuare vom demonstra concurenţa acestor linii importante ale triunghiului.

Vom demonstra concurenţa mediatoarelor unui triunghi, folosind principala proprietate a punctelor de pe mediatoarea unui segment:

Toate punctele mediatoarei unui segment se află la aceeaşi distanţă faţă de capetele acestuia şi reciproc toate punctele din plan care se află la distanţe egale de capetele unui segment se află pe mediatoarea acestuia.

TEOREMA 1.1 *Într-un triunghi mediatoarele laturilor sunt concurente.*

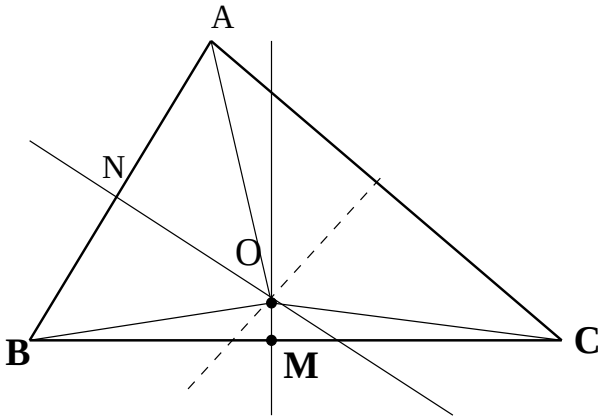

Figura 1.1: Concurenţa mediatoarelor

Demonstraţie.

Notăm cu M şi N mijloacele laturilor $[BC]$ şi $[AB]$ ale triunghiului ABC. Punctul de intersecţie al perpendicularelor în M şi N pe laturile respective(mediatoarele acestor laturi) va fi notat cu O. Cele două mediatoare sunt concurente, altfel punctele A, B, C ar fi coliniare, ceea ce este imposibil.

Folosind proprietatea punctelor de pe mediatoare de a fi la egală distanţă faţă de capetele segmentului, putem scrie

$OA = OB$, ON fiind mediatoarea lui $[AB]$ şi

$OB = OC$, OM fiind mediatoarea lui $[BC]$.

Rezultă din tranzitivitatea relaţiei de egalitate că $OA = OC$, deci punctul O se află şi pe mediatoarea laturii $[AC]$. **q.e.d.**

Vom demonstra concurenţa bisectoarelor interioare ale unui triunghi, folosind *proprietatea punctelor de pe bisectoare de a fi la egală distanţă faţă de laturile acestuia.*

TEOREMA 1.2 *Într-un triunghi bisectoarele interioare sunt concurente.*

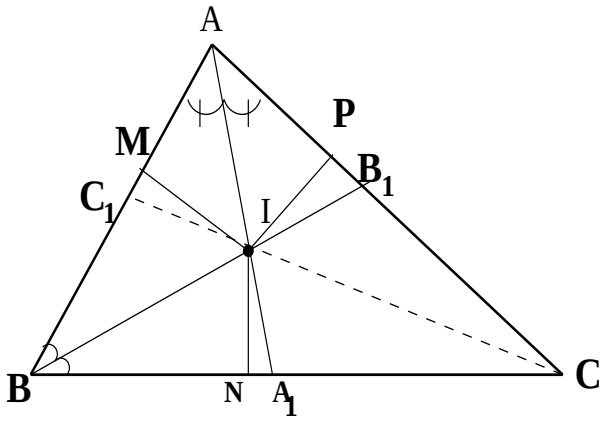

Figura 1.2: Concurenţa bisectoarelor

Demonstraţie. Notăm $[AA_1$ şi $[BB_1$ bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{ABC}$ ale triunghilui ABC şi I punctul lor de intersecţie. Aceste bisectoare sunt concurente, altfel ar fi paralele ceea ce ar însemna că unghiurile $\widehat{BAA_1}$ şi $\widehat{ABB_1}$ ar fi unghiuri interne şi de aceeaşi parte a secantei AB, iar suma măsurilor lor ar fi de 180°, ceea ce este imposibil căci suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC este 180°.

Folosind proprietatea că numai punctele de pe bisectoare sunt egal depărtate de laturile triunghiului putem scrie:

$IM = IN$ şi $IM = IP$, $(M \in (AB), \quad N \in (BC), \quad P \in (AC), \quad IM \perp AB, IN \perp BC, IP \perp AC)$.

Folosind proprietatea de tranzitivitatea a egalităţii numerelor reale, rezultă

$$IN = IP$$

deci punctul I se află şi pe bisectoarea unghiului ACB. **q.e.d.**

De asemenea se poate demonstra:

TEOREMA 1.3 *Într-un triunghi înălţimile sunt concurente.*

Demonstraţie. Considerăm un triunghi ABC, cu înălţimile $[AA', [BB', [CC'$ $(AA' \perp BC, BB' \perp AC, CC' \perp AB)$.

Paralelele prin vârfurile triunghiului la laturile opuse se intersectează în punctele A_1, B_1, C_1. Din congruenţa laturilor opuse ale paralelogramelor obţinute rezultă

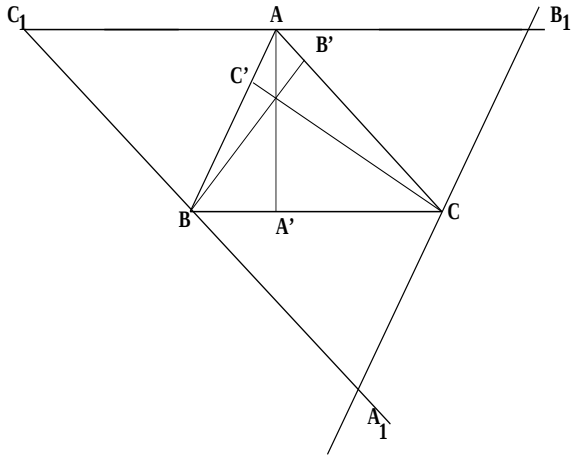

Figura 1.3: Concurenţa înălţimilor

că punctele A, B, C sunt mijloacele laturilor $[B_1C_1], [C_1A_1], [A_1B_1]$ ale triunghiului $A_1B_1C_1$ ($AB_1 = AC_1, BC_1 = BA_1, CA_1 = CB_1$).

Din $AA' \perp BC$ şi $C_1B_1 \parallel BC$ rezultă $AA' \perp C_1B_1$. Analog pentru celelalte laturi se găseşte că $BB' \perp C_1A_1$ şi $CC' \perp A_1B_1$.

Constatăm că înălţimile triunghiului ABC sunt mediatoarele triunghiului $A_1B_1C_1$. Dar, concurenţa mediatoarelor a fost demonstrată, aşa că şi concurenţa înălţimilor este demonstrată. **q.e.d.**

Pentru a demonstra concurenţa celor trei mediane ale unui triunghi vom reaminti că:

-linia mijlocie într-un triunghi este segmentul de dreaptă care uneşte mijloacele a două laturi ale triunghiului,

-linia mijlocie este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului şi este egală cu jumătate din lungimea ei.

TEOREMA 1.4 *Într-un triunghi medianele sunt concurente.*

Demonstraţie. Notăm cu A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC], [AB]$ ale triunghiului ABC. Punctul de intersecţie al medianelor $[AA']$ şi $[CC']$ este G. Vom demonstra că punctul G aparţine şi medianei $[BB']$. Mijloacele segmentelor $[AG], [CG]$ vor fi notate cu $A"$ respectiv $C"$

$$AA" = A"G, CC" = C"G.$$

$[A"C"]$ este linie mijlocie în triunghiul GAC, ceea ce implică

$$A"C" \parallel AC, A"C" = \frac{1}{2}AC. \tag{1.1}$$

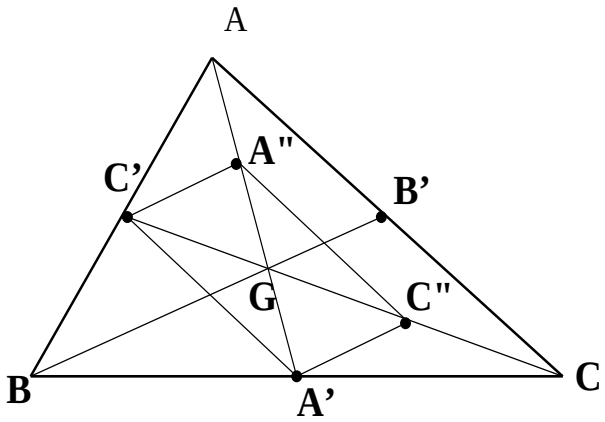

Figura 1.4: Concurenţa medianelor

De asemenea, $[A'C']$ este linie mijlocie în triunghiul BAC şi se obţine:

$$A'C' \parallel AC, A'C' = \frac{1}{2}AC. \tag{1.2}$$

Din (1.1) şi (1.2), folosind tranzitivitatea relaţiei de paralelism şi a celei de egalitate, rezultă

$$A'C' \parallel A"C", A'C' = A"C".$$

Deci patrulaterul $A'C'A"C"$ este paralelogram, cu G punctul de intersecţie al diagonalelor, ceea ce implică

$$A'G = GA", C'G = GC".$$

Cum $AA" = A"G$ şi $CC" = C"G$, rezultă:

$$AA" = A"G = GA' = \frac{1}{3}AA'$$

şi

$$CC" = C"G = GC' = \frac{1}{3}CC'.$$

Am obţinut astfel:

Punctul G de intersecţie al medianelor $[AA']$ şi $[CC']$ se află pe fiecare dintre cele două mediane, la două treimi de vârf şi o treime de mijlocul laturii opuse.

Un rezultat asemănător se poate demonstra şi pentru medianele $[AA']$ şi $[BB']$.

Cum pe $[AA']$ este un singur punct care se află la două treimi de vârf şi o treime de mijlocul laturii opuse, rezultă că acesta este G, deci mediana $[BB']$ trece şi ea prin punctul G. **q.e.d.**

1.1.2 Cercul înscris în triunghi, cercul circumscris şi exânscris unui triunghi

Cercul înscris în triunghi

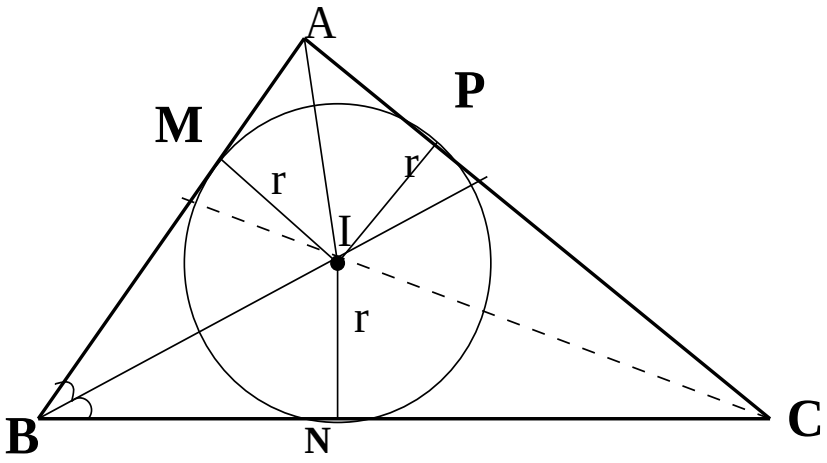

Figura 1.5: Cerc înscris în triunghi

DEFINIŢIA 1.5 *1. Triunghiul care are toate laturile tangente la un cerc se numeşte triunghi circumscris acelui cerc.*

2. Cercul care este tangent la toate laturile unui triunghi se numeşte cerc înscris în triunghi.

Centrul cercului înscris într-un triunghi, notat cu I, este punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor triunghiului. Raza cercului înscris într-un triunghi o vom nota cu r.

Observaţia 1.1 *1. Dacă $C(I;r)$ este cercul înscris în triunghiul ABC, atunci triunghiul ABC este triunghiul circumscris cercului $C(I;r)$;*

2. $IM = IN = IP = r$, unde M, N, P sunt punctele de tangenţă ale laturile triunghiului la cercul înscris.

PROPOZIŢIA 1.1

$$r = \frac{2\mathcal{A}}{P},$$

unde $\mathcal{A}$ este aria triunghiului ABC, iar $P = AB + AC + BC$.

Demonstraţie.
Într-adevăr, aria triunghiului ABC este suma ariilor triunghiurilor AIB, BIC, CIA.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{AIB} + \mathcal{A}_{BIC} + \mathcal{A}_{CIA} = \frac{AB \cdot IM}{2} + \frac{BC \cdot IN}{2} + \frac{AC \cdot IP}{2} = \frac{r \cdot P}{2}.$$

q.e.d.

Cercul circumscris unui triunghi

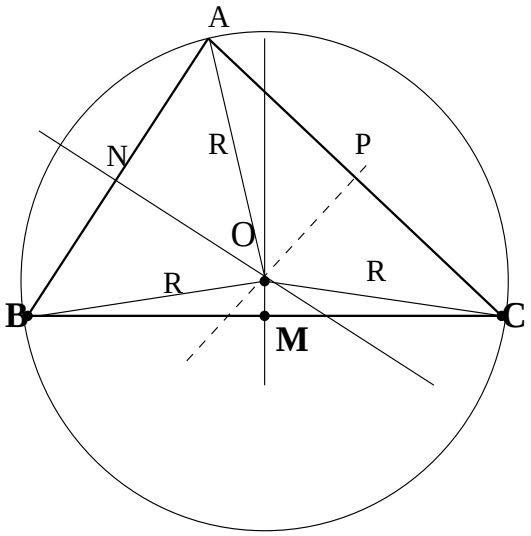

Figura 1.6: Cerc circumscris unui triunghi

DEFINIŢIA 1.6 *1. Triunghiul care are vârfurile situate pe un cerc, iar laturile sunt coarde ale cercului se numeşte înscris în cerc.*

2. Cercul în care se înscrie un triunghi se numeşte cerc circumscris triunghiului.

Centrul cercului circumscris unui triunghi ABC este punctul de intersecţie al mediatoarelor laturilor triunghiului, notat cu O.

Raza cercului circumscris se notează cu R.

Notăm cercul circumscris triunghiului ABC cu $C(O;R)$.

1. Triunghiul ABC este triunghiul inscris in cercul $C(O;R)$;
2. $OA = OB = OC = R$.

PROPOZIŢIA 1.2 *Simetricele ortocentrului triunghiului faţă de mijloacele laturilor triunghiului aparţin cercului circumscris triunghiului.*

PROPOZIŢIA 1.3 *Simetricele ortocentrului triunghiului faţă de laturile triunghiului aparţin cercului circumscris triunghiului.*

Demonstraţie. Fie A_2 punctul în care înălţimea AA_1 intersectează cercul circumscris triunghiului.

Deoarece $m(\widehat{BHA_1}) = m(\widehat{BCA})) = m(\widehat{AA_2B})$ rezultă triunghiul A_2BH isoscel cu BA_1 înălţime, mediana, mediatoare, adică $HA_1 = A_1A_2$.

q.e.d.

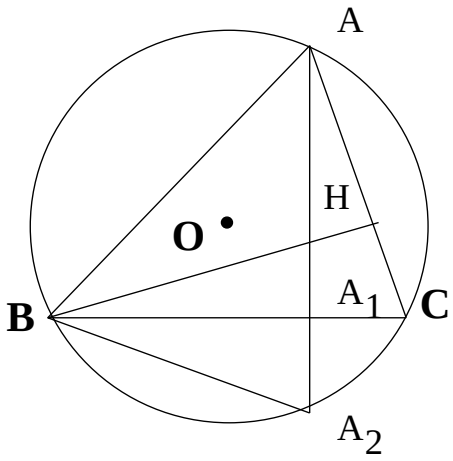

Figura 1.7:

PROPOZIŢIA 1.4

$$R = \frac{abc}{4\mathcal{A}},$$

unde a, b, c *sunt lungimile laturilor, iar* $\mathcal{A}$ *este aria triunghiului* ABC.

Demonstraţie.

Formula de calcul pentru raza cercului circumscris se obţine astfel:

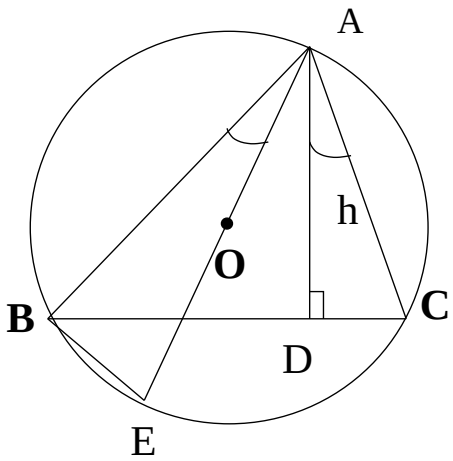

Figura 1.8: Raza cercului circumscris

Prin vârful A al triunghiului se construieşte diametrul cercului circumscris, notat cu AE. Se obţine astfel triunghiul dreptunghic ABE (triunghi înscris în semicerc). Prin construirea înălţimii din punctul A se obţine triunghiul dreptunghic ADC asemenea cu ABE conform cazului UU. Notăm lungimea acestei înalţimi cu h.

Laturile celor două triunghiuri asemenea sunt proporţionale:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AD} \Rightarrow 2Rh = AC \cdot AB \Rightarrow R = \frac{AC \cdot AB}{2h}.$$

Dar, aria triunghiului ABC, notată cu $\mathcal{A}$, este $\mathcal{A} = \dfrac{h \cdot BC}{2}$, de unde rezultă :

$$h = \frac{2\mathcal{A}}{BC}.$$

Înlocuind h în expresia lui R se obţine formula de calcul a razei cercului circumscris triunghiului ABC,

$$R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}.$$

q.e.d.

O legatură între raza cercului înscris şi raza cercului circumscris unui triunghi este dată de relaţia lui Euler.

PROPOZIŢIA 1.5 Relaţia lui Euler

$$d^2 = R(R - 2r)$$

unde d este distanţa dintre centrul cercului circumscris şi centrul cercului înscris într-un triunghi, R raza cercului circumscris şi r raza cercului înscris în triunghi.

Demonstraţie. Fie D punctul în care bisectoarea $[AI$ intersectează cercul circum-

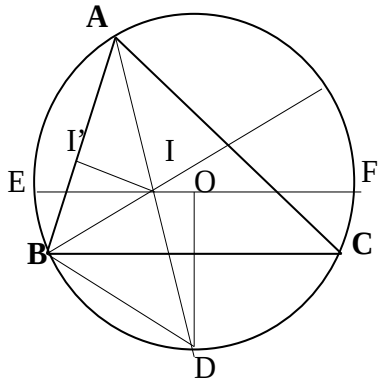

Figura 1.9: Relaţia lui Euler

scris triunghiului ABC şi fie punctele $\{E, F\} = C(O, R) \cap OI$. Din triunghiul ABD rezultă $BD = 2R \sin \dfrac{A}{2}$, iar din triunghiul dreptunghic $AI'I$

$$AI = \frac{r}{\sin \dfrac{A}{2}}.$$

Dar $[AI$ şi $[BI$ sunt bisectoarele unghiurilor BAC şi ABC, se obţine $BD = ID$.

Folosind puterea punctului I faţă de cercul $C(O,R)$, din ultimele relaţii rezultă

$$2Rr = ID \cdot IA = IE \cdot IF = (R - OI)(R + OI) = R^2 - IO^2$$

q.e.d.

Se poate vedea că şi inegalitatea lui Euler

$$R > 2r$$

este verificată.

Cercuri exânscrise unui triunghi

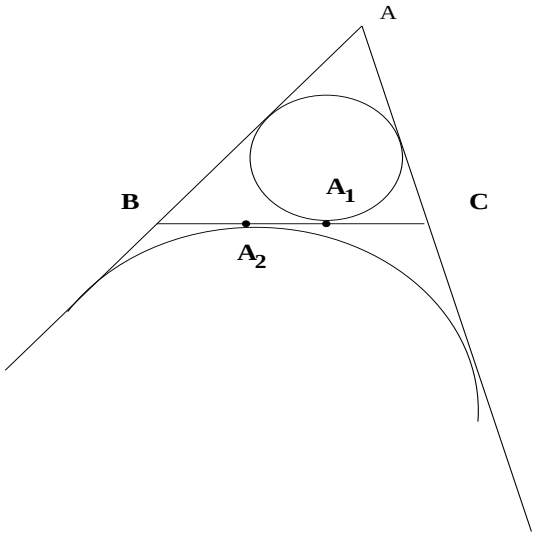

Figura 1.10: Cerc exânscris unui triunghi

DEFINIŢIA 1.7 *Un cerc tangent unei laturi a unui triunghi şi prelungirilor celorlalte două laturi se numeşte triunghi exânscris triunghiului.*

Centrul unui cerc exânscris unui triunghi se află la intersecţia bisectoarelor celor două unghiuri exterioare şi a bisectoarei unghiului interior neadiacent cu ele.

Există 3 cercuri exânscrise unui triunghi.

Proprietate

Punctele de tangenţă ale cercului exânscris şi cercului înscris într-un triunghi sunt simetrice faţă de mijlocul laturii la care sunt tangente amândouă.

TEOREMA 1.5 *Fie triunghiul ABC. Dacă M, N, P sunt punctele de tangenţă ale cercurilor exânscrise cu laturile triunghiului, atunci AM, BN, CP sunt concurente în punctul care se numeşte* **punctul lui Nagel.**

1.2 Teoremele MENELAUS şi CEVA

1.2.1 Teorema lui Menelaus

Teorema lui Menelaus este una dintre teoremele clasice ale geometriei.

De-a lungul anilor ea a fost demonstrată prin diverse metode folosind rezultatele din geometria sintetică, dar şi cu metoda analitică , cu metoda vectorială şi cu ajutorul transformărilor geometrice, al omotetiei.

TEOREMA 1.6 *(TEOREMA LUI MENELAUS)*

Fie un triunghi ABC, $M \in (BC, N \in (AC), P \in (AB)$.*Dacă punctele* M, N, P *sunt coliniare, atunci:*

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1. \tag{1.3}$$

Demonstraţie. Se construieşte prin C paralela cu dreapta d care conţine punctele M, N, P. Aceasta intersectează AB în punctul notat cu R.

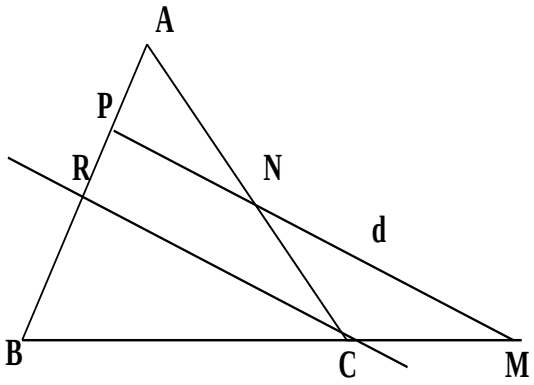

Figura 1.11: Teorema lui Menelaus

Se aplică teorema lui Thales în triunghiul BMP cu $CR \parallel MP$:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{PB}{PR}, \tag{1.4}$$

iar în triunghiul ARC cu $PN \parallel RC$ rezultă:

$$\frac{CN}{NA} = \frac{PR}{PA}. \tag{1.5}$$

Din relaţiile (1.4) şi (1.5) rezultă:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = \frac{PB}{PR} \cdot \frac{PR}{PA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

q.e.d.

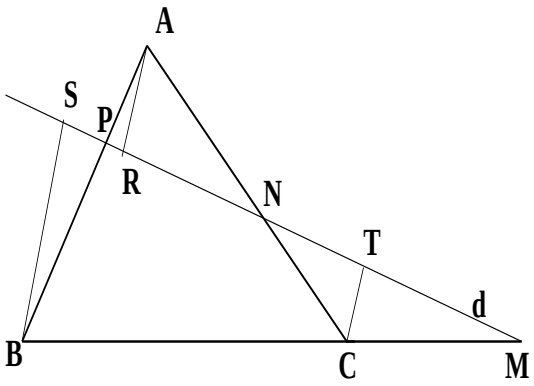

Figura 1.12: Teorema lui Menelaus

O altă demonstraţie a teoremei lui Menelaus, folosind geometria sintetică:

Demonstraţie. Fie triunghiul ABC şi transversala d care se intersectează cu laturile triunghiului în punctele $M \in (BC, N \in (AC), P \in (AB)$.

Construim $CT \perp d, BS \perp d, AR \perp d$, lungimile acestor segmente reprezentând distanţele de la vârfurile triunghiului la transversala d, vor fi notate cu $CT = d_C$, $BS = d_B$, $AR = d_A$.

Se formează astfel perechile de triunghiuri dreptunghice asemenea:

$$\Delta ARP \sim \Delta BPS, \quad \Delta BSM \sim \Delta CTM, \quad \Delta NCT \sim \Delta ARN$$

pentru care scriem proporţionalitatea laturilor:

$$\frac{d_A}{d_B} = \frac{AP}{BP}; \quad \frac{d_B}{d_C} = \frac{MB}{MC}; \quad \frac{d_C}{d_A} = \frac{NC}{NA}.$$

Înmulţind aceste relaţii membru cu membru se va obţine relaţia lui Menelaus.

q.e.d.

Vom prezenta în continuare reciproca teoremei lui Menelaus:

TEOREMA 1.7 *Fie un triunghi ABC, $M \in (BC, N \in (AC), P \in (AB)$ astfel încât are loc relaţia:*

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1. \tag{1.6}$$

Atunci punctele M, N, P sunt coliniare.

Demonstraţie. Dreapta MN se intersectează cu AB în punctul pe care-l notăm cu P_1. Punctele M, N, P_1 fiind coliniare, aplicăm teorema lui Menelaus şi obţinem:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP_1}{BP_1} = 1. \tag{1.7}$$

Din relaţiile (1.6), (1.7) rezultă

$$\frac{AP_1}{BP_1} = \frac{AP}{PB}$$

adică $P = P_1$. Deci punctele M, N, P sunt coliniare. **q.e.d.**

Teorema lui Menelaus se poate demonstra şi în cazul $M \in (BC, N \in (AC, P \in (AB$.

TEOREMA 1.8 *Fie un triunghi ABC, $M \in (BC, N \in (AC, P \in (AB$. Dacă punctele M, N, P sunt coliniare, atunci:*

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1. \tag{1.8}$$

Demonstraţie. Construim dreapta d care se intersectează cu $(BC$ în punctul M, cu $(AC$ în N şi cu $(AB$ în P. Ducem prin C paralela la d care se intersectează cu AB în R.

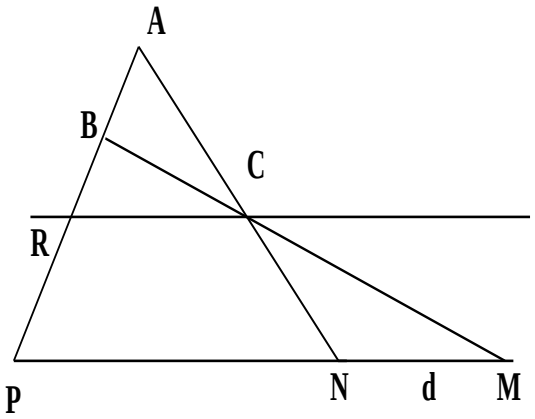

Figura 1.13:

Aplicăm teorema lui Thales

- în triunghiul BMP cu $CR \parallel MP$:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{PB}{PR}, \tag{1.9}$$

- în triunghiul APN cu $PN \parallel RC$:

$$\frac{CN}{NA} = \frac{PR}{PA}. \tag{1.10}$$

Din relaţiile (1.9) şi (1.10) rezultă:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = \frac{PB}{PR} \cdot \frac{PR}{PA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1.$$

q.e.d.

În continuare vom prezenta teorema lui Menelaus pentru un patrulater:

TEOREMA 1.9 *Fie $ABCD$ un patrulater şi punctele $M \in (CB, N \in (AB), P \in (DC), Q \in (AD$. Dacă punctele M, N, P, Q sunt coliniare, atunci*

$$\frac{MC}{MB} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{AQ}{QD} \cdot \frac{PD}{PC} = 1. \tag{1.11}$$

Demonstraţie. Notăm cu d dreapta care conţine punctele M, N, P, Q. Se construiesc paralele la dreapta d prin punctele B şi A care se intersectează cu $(CD$ în punctele R şi S.

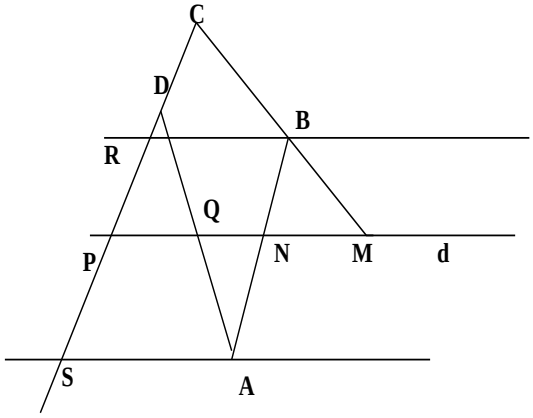

Figura 1.14: Teorema lui Menelaus în patrulater

Aplicăm teorema lui Thales

- în triunghiul CMP cu $BR \parallel MP$:

$$\frac{MC}{MB} = \frac{PC}{PR}, \tag{1.12}$$

- în triunghiul ADS cu $PQ \parallel AS$:

$$\frac{AQ}{QD} = \frac{PS}{PD}. \tag{1.13}$$

Dreptele $BR \parallel NP \parallel AS$ tăiate de secantele AB şi CS determină proporţionalitatea segmentelor:

$$\frac{BN}{NA} = \frac{PR}{PS}. \tag{1.14}$$

Din relaţiile (1.12), (1.13), (1.14) se obţine:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{AQ}{QD} \cdot \frac{PD}{PC} = \frac{PC}{PR} \cdot \frac{PR}{PS} \cdot \frac{PS}{PD} \cdot \frac{PD}{PC} = 1.$$

q.e.d.

În acelaşi mod se poate demonstra o relaţie ca cea din teorema lui Menelaus pentru un poligon cu $n > 4$ laturi convex sau concav.

1.2.2 Teorema lui Ceva

Teorema lui Ceva este un rezultat din geometria triunghiului, cu aplicaţii în geometria proiectivă. A fost descoperită de matematicianul italian Giovanni Ceva, care a formulat-o şi a demonstrat-o în 1678 în lucrarea *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio.*

Se pare că această teoremă era cunoscută, cu multe secole înainte (secolul al XI-lea) de unii matematicieni arabi (Yusuf Al-Mu'taman ibn Hud).

TEOREMA 1.10 *(TEOREMA LUI CEVA)*

Fie triunghiul ABC şi D, E, F trei puncte diferite de vârfurile triunghiului, aflate respectiv pe laturile acestuia $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Dacă dreptele AD, BE şi CF sunt concurente atunci:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \tag{1.15}$$

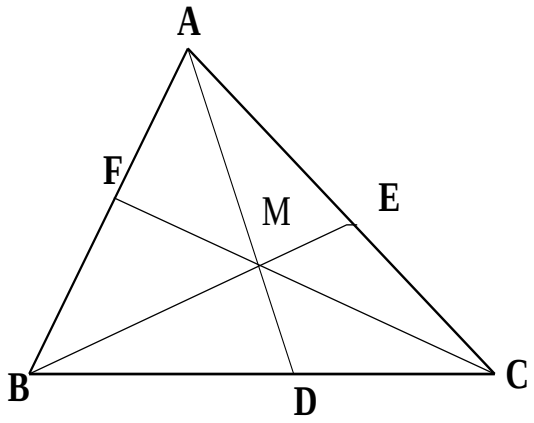

Figura 1.15: Teorema lui Ceva

Demonstraţie. Notăm cu M punctul de intersecţie al dreptelor AD, BE şi CF.
Aplicăm teorema lui Menelaus pentru:
-triunghiul ABD cu secanta CF

$$\frac{CB}{CD} \cdot \frac{MD}{MA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1, \tag{1.16}$$

de unde se obţine:

$$\frac{MD}{MA} = \frac{FB}{FA} \cdot \frac{CD}{CB}; \tag{1.17}$$

-în triunghiul ADC cu secanta BE

$$\frac{BC}{BD} \cdot \frac{MD}{MA} \cdot \frac{AE}{EC} = 1. \tag{1.18}$$

Din relaţiile (1.17) şi (1.18) se obţine:

$$\frac{BC}{BD} \cdot \frac{FB}{FA} \cdot \frac{CD}{CB} \cdot \frac{AE}{EC} = 1,$$

adică relaţia din teoremă. **q.e.d.**

Într-un triunghi dreapta care uneşte un vârf al acestuia cu un punct de pe latura opusă se numeşte **cevianǎ.**

TEOREMA 1.11 *(Reciproca teoremei lui Ceva)*
Dacă AD, BE, CF sunt trei ceviene în triunghiul ABC şi

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1. \tag{1.19}$$

atunci cevienele sunt concurente.

Demonstraţie. Demonstraţia se face prin reducere la absurd.
Presupunem că AD nu trece prin punctul M, $\{M\} = CF \cap BE$. Fie N punctul de intersecţie dintre AM şi BC, $AM \cap BC = \{N\}$. Aplicând teorema lui Ceva pentru punctele E, F şi N şi comparând cu relaţia din enunţ obţinem că $M = N$. **q.e.d.**

1.2.3 Teorema lui VAN AUBEL

TEOREMA 1.12 *(TEOREMA LUI VAN AUBEL)*
Fie un triunghi ABC, $D \in (BC), E \in (AC), F \in (AB)$. Dacă AD, BE, CF sunt concurente în M atunci

$$\frac{EA}{EC} + \frac{FA}{FB} = \frac{MA}{MD}. \tag{1.20}$$

Demonstraţie. Se aplică teorema lui Menelaus:
în triunghiul ABD cu secanta FC

$$\frac{FB}{AF} \cdot \frac{AM}{MD} \cdot \frac{DC}{BC} = 1, \tag{1.21}$$

de unde rezultă

$$\frac{AM}{MD} \cdot \frac{DC}{BC} = \frac{AF}{FB}. \tag{1.22}$$

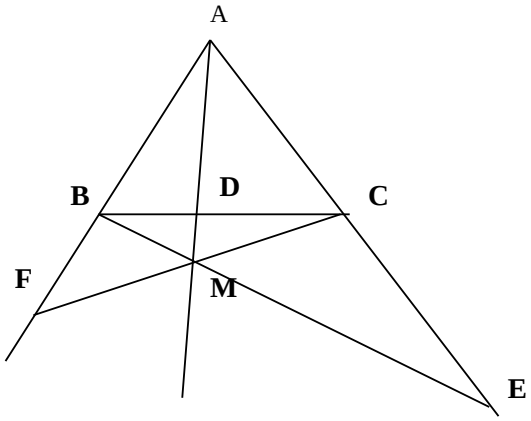

Figura 1.16: Teorema lui Van Aubel

şi în triunghiul ADC cu secanta BE

$$\frac{CE}{AE} \cdot \frac{AM}{MD} \cdot \frac{BD}{BC} = 1 \tag{1.23}$$

de unde rezultă:

$$\frac{AM}{MD} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{AE}{CE}. \tag{1.24}$$

Adunăm relaţiile (1.22) şi (1.24):

$$\frac{AM}{MD}\left(\frac{DC}{BC} + \frac{BD}{BC}\right) == \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{CE} \Rightarrow$$

$$\frac{EA}{EC} + \frac{FA}{FB} = \frac{MA}{MD}.$$

q.e.d.

1.3 Patrulatere inscriptibile

Dacă în cazul triunghiului întotdeauna există un cerc circumscris acestuia, în cazul patrulaterelor nu se aplică acest rezultat, adică nu orice patrulater poate fi înscris într-un cerc.

DEFINIŢIA 1.8 *1. Patru puncte (sau mai multe) se numesc puncte concilice dacă există un cerc căruia să-i aparţină toate cele patru puncte.*

2. Un patrulater se numeşte inscriptibil dacă cele patru vârfuri ale sale sunt puncte conciclice.

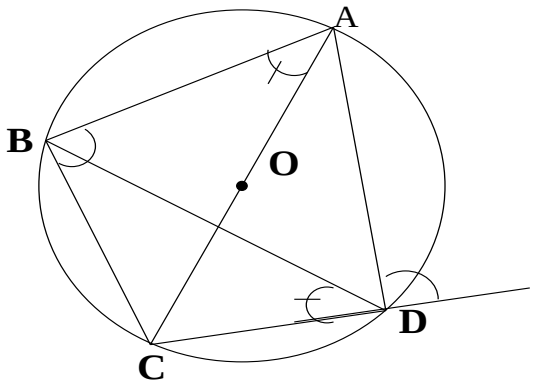

Figura 1.17: Patrulater inscriptibil

PROPOZIŢIA 1.6 *Proprietăţi ale patrulaterului inscriptibil*

1. *Într-un patrulater inscriptibil, unghiurile opuse sunt suplementare.*
2. *Unghiurile formate de diagonale cu două laturi opuse sunt congruente.*

Demonstraţia acestor afirmaţii este imediată folosind mărimea arcelor subântinse de aceste unghiuri.

Reciprocele acestor afirmaţii, de asemenea, se pot demonstra uşor.

PROPOZIŢIA 1.7 *Un patrulater este inscriptibil dacă şi numai dacă mediatoarele laturilor sale sunt concurente.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Se consideră un un patrulater $ABCD$, care este inscriptibil,

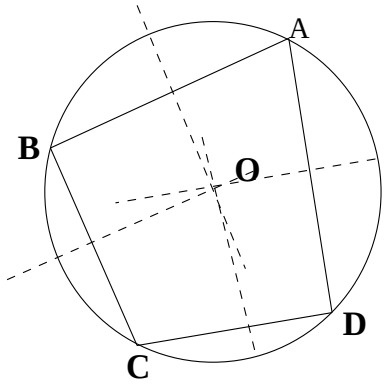

Figura 1.18: Patrulater inscriptibil

adică există un cerc $C(O, r)$ care conţine punctele A, B, C, D. Atunci

$$OA = OB = OC = OD = r,$$

deci punctul O se află pe mediatoarele segmentelor $[AB], [BC], [AC], [AD]$.

"$\Leftarrow$" Se consideră patrulaterul $ABCD$, cu mediatoarele laturilor sale $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$, $[AD]$, concurente în punctul O.

Atunci folosind proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment de a se afla la aceeaşi distanţă faţă de capetele lui se obţine

$$OA = OB = OC = OD = r,$$

adică vârfurile lui se află pe cercul cu centrul în punctul O şi rază r. **q.e.d.**

Cazuri particulare de patrulatere inscriptibile:

1. Dreptunghiul, pătratul sunt patrulatere inscriptibile;
2. Un trapez este inscriptibil dacă şi numai dacă este isoscel.

1.3.1 Teorema lui Ptolemeu

Inegalitatea lui Ptolemeu În orice patrulater convex $ABCD$ are loc relaţia:

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

TEOREMA 1.13 *(TEOREMA LUI PTOLEMEU)*
Patrulaterul convex $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD. (Relaţia \quad lui \quad Ptolemeu) \tag{1.25}$$

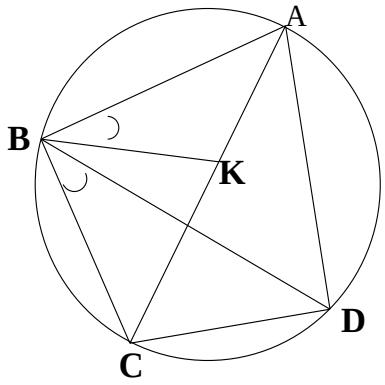

Figura 1.19: Teorema lui Ptolemeu

Demonstraţie. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Pe diagonala AC se consideră punctul K astfel încât $\widehat{ABK} = \widehat{CBD}$.

$$\widehat{ABK} + \widehat{CBK} = \widehat{ABC} = \widehat{CBD} + \widehat{ABD} \Rightarrow \widehat{CBK} = \widehat{ABD}.$$

Se observă că triunghiurile $ABK \sim DBC$, de unde rezultă

$$\frac{AK}{CD} = \frac{AB}{BD}, \tag{1.26}$$

iar triunghiul $ABD \sim KBC$, cu

$$\frac{CK}{DA} = \frac{BC}{BD}. \tag{1.27}$$

Putem scrie:

$$AK \cdot BD = AB \cdot CD$$

$$CK \cdot BD = AD \cdot BC$$

şi adunând aceste relaţii obţinem relaţia lui Ptolemeu. **q.e.d.**

Observaţia 1.2 *Se pot deplasa punctele A, B, C, D pe cerc oricum, dar ca relaţia lui Ptolemeu să se verifice este necesar ca AC şi BD să rămână diagonale.*

În cazul în care $ABCD$ este dreptunghi, relaţia lui Ptolemeu devine teorema lui PITAGORA.

1.4 Patrulatere circumscriptibile

DEFINIŢIA 1.9 *1. Un patrulater care are cele patru laturi tangente unui cerc se numeşte patrulater circumscris cercului.*

2. Un patrulater spunem că este circumscriptibil dacă poate fi circumscris unui cerc.

Nu putem spune că orice patrulater este circumscriptibil.

PROPOZIŢIA 1.8 *Un patrulater poate fi circumscris unui cerc dacă şi numai dacă bisectoarele unghiurilor sale sunt concurente.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Considerăm un patrulater $ABCD$ circumscris unui cerc, adică laturile sale $[AB], [BC], [AC], [AD]$ sunt tangente la un cerc $C(O, r)$. Atunci

$$d(O, AB) = d(O, BC) = d(O, CD) = d(O, AD) = r,$$

deci punctul O se află pe bisectoarele unghiurilor A, B, C, D.

"$\Leftarrow$" Se consideră patrulaterul $ABCD$, cu bisectoarele unghiurilor sale concurente în punctul O.

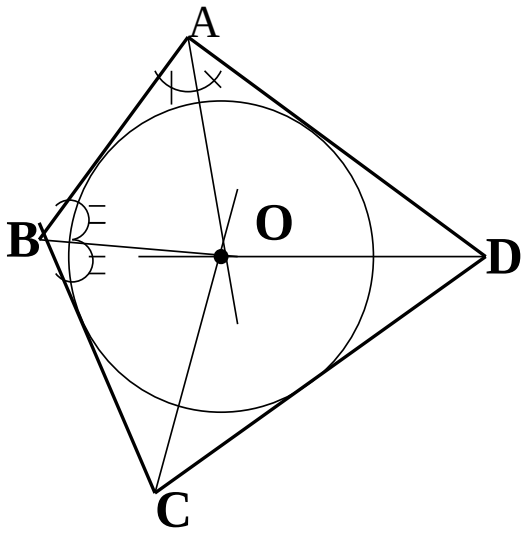

Figura 1.20: Patrulater circumscris

Atunci folosind proprietatea punctelor de pe bisectoare de a se afla la aceeaşi distanţă faţă de laturile unghiului se obţine

$$d(O, AB) = d(O, BC) = d(O, CD) = d(O, AD) = r,$$

adică cercul cu centrul în punctul O şi rază r este tangent fiecărei laturi a patrulaterului.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 1.9 *Un patrulater este circumscriptibil dacă şi numai dacă suma lungimilor laturilor opuse este aceeaşi,*

$$AB + CD = AD + BC.$$

Aceasta proprietate poate fi uşor demonstrată, deoarece ştim că tangentele duse dintr-un punct la un cerc au aceeaşi lungime.

PROPOZIŢIA 1.10 *1. Dacă un patrulater circumscris unui cerc este trapez, atunci punctele de contact cu cercul ale bazelor şi centrul cercului sunt colineare.*

2. Dacă trapezul este isoscel, atunci lungimea diametrului cercului înscris în trapez este media geometrică a lungimii bazelor.

Demonstraţie.

1.Triunghiurile $\Delta DEO \equiv \Delta DIO$ sunt congruente, pentru că sunt dreptunghice şi au laturile respectiv egale.

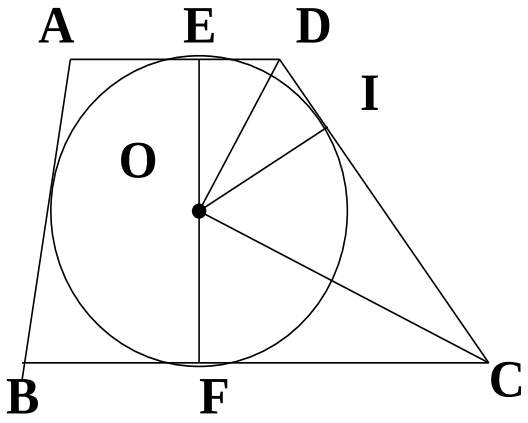

Figura 1.21: Trapez circumscris

Congruente sunt şi triunghiurile $\Delta OIC \equiv \Delta OFC$ (se poate demonstra tot folosind cazul 3 de congruenţă a triunghiurilor). Obţinem astfel congruenţa unghiurilor $\widehat{EOD} \equiv \widehat{DOI}$ şi $\widehat{IOC} \equiv \widehat{COF}$.Dar triunghiul DOC este dreptunghic cu unghiul drept $\widehat{DOC}$. Atunci se observă că unghiul $\widehat{EOF}$ este alungit, adică măsura lui este 180°, ceea ce ne arată coliniaritatea celor trei puncte.

2.În triunghiul dreptunghic DOC segmentul OI este înălţime pe ipotenuză şi cum $DI = DE, CI = CF$ obţinem

$$DE \cdot CF = OI^2 = r^2; \quad AE \cdot BF = r^2.$$

Dacă trapezul este isoscel se obţine proprietatea anunţată. **q.e.d.**

1.4.1 Cercul lui Euler

Cercul lui Euler sau cercul celor 9 puncte este cercul ce trece prin mijloacele laturilor unui triunghi ; picioarele înălţimilor ; mijloacele segmentelor cuprinse între vârfuri şi ortocentru.

Centrul lui se găseşte la mijlocul segmentului HO (H este ortocentrul; O estecentrul cercului circumscris) şi are raza egală cu jumătatea razei cercului circumscris.

Vom demonstra conciclitatea celor 9 puncte în capitolul următor, folosind transformările geometrice.

1.5 Probleme de coliniaritate

1.5.1 Metode de demonstrare a coliniarităţii unor puncte

Coliniaritatea a trei puncte se poate demonstra prin mai multe metode:

1. folosind identitatea $AB = AC + CB$, unde AB, AC, BC sunt segmente de dreaptă;
2. utilizând reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf;
3. cu ajutorul unghiului alungit;
4. identificarea apartenenţei punctelor la o dreaptă remarcabilă (linie mijlocie, mediatoare, bisectoare, etc.) în configuraţia respectivă.
5. folosind postulatul lui Euclid: Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o paralelă şi numai una la acea dreaptă.
6. cu ajutorul proprietăţilor paralelogramului;
7. folosind unicitatea perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă;
8. utilizând reciproca teoremei lui Menelaus;
9. prin utilizarea axiomei 6 de incidenta (sau de situare): Dacă două plane distincte au un punct comun atunci intersecţia lor este o dreaptă;
10. prin metoda analitică;
11. prin metoda vectorială;
12. folosind transformări geometrice;
13. folosind numerele complexe: punctele $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ sunt colineare dacă şi numai dacă $\dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in R$.

1.5.2 Teorema lui Euler, dreapta lui Simpson

Dreapta lui Euler

TEOREMA 1.14 *În orice triunghi ortocentrul H, centrul de greutate G şi centrul cercului circumscris triunghiului sunt coliniare.*

Dreapta determinată de cele trei puncte se numeşte **dreapta lui Euler.**

Demonstraţie. a)Dacă triunghiul ABC este isoscel sau dreptunghic, atunci cele trei puncte se află pe o mediană.

b)În cazul triunghiului oarecare ABC, notăm cu A_1, B_1 picioarele înălţimilor din vârfurile A şi B, iar picioarele medianelor din aceste vârfuri sunt A' şi B'. Triunghiurile HAB şi $OA'B'$ sunt asemenea pentru că au laturile paralele. Folosind teorema fundamentală a asemănării se obţine:

$$\frac{HA}{OA'} = \frac{HB}{OB'} = \frac{AB}{A'B'} = 2 \Rightarrow \frac{HA}{OA'} = 2.$$

Dar punctul G împarte mediana în raportul $\frac{AG}{GA'} = 2$. Atunci triunghiurile OGA' şi

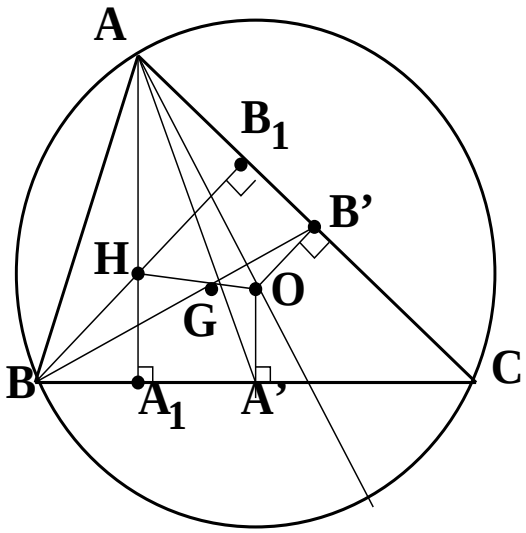

Figura 1.22:

HGA sunt asemenea conform cazului al doilea de asemănare şi rezultă

$$\widehat{OGA'} = \widehat{AGH},$$

ceea ce implică coliniaritatea punctelor O, G, H. **q.e.d.**

Dreapta lui Simpson

TEOREMA 1.15 *Proiecţiile ortogonale ale unui punct de pe cercul circumscris triunghiului ABC pe laturile acestuia sunt coliniare.*

Dreapta care conţine punctele coliniare din teorema anterioară se numeşte **dreapta lui Simpson**.

Demonstraţie. Considerăm un punct M pe cercul circumscris triunghiului ABC şi notăm proiecţiile ortogonale ale acestuia pe laturile BC, AC, AB cu D, E, respectiv F.

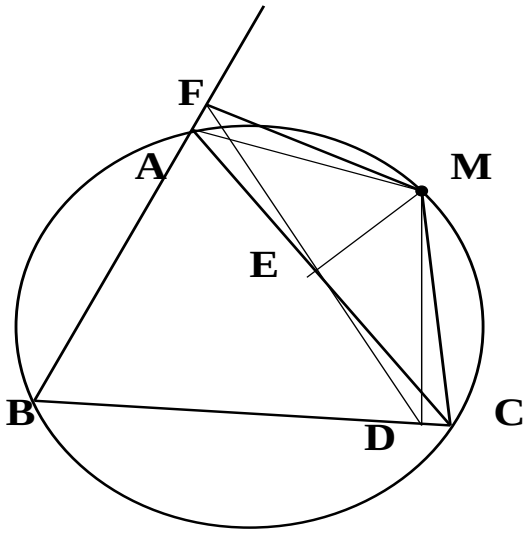

Figura 1.23: Dreapta lui Simpson

Patrulaterele $AEMF, FBDM$ sunt inscriptibile pentru că au unghiurile opuse suplementare, dar şi $MEDC$ este inscriptibil.

Atunci

$$\widehat{DEC} = \widehat{DMC} = 90^\circ - \widehat{DCM} = 90^\circ - \widehat{FAM} = \widehat{FMA} = \widehat{FEA}.$$

Obţinem $\widehat{DEC} = \widehat{FEA}$, care sunt unghiuri opuse la vârf, ceea ce implică coliniaritatea punctelor D, E, F.

q.e.d.

1.5.3 Relaţia lui Carnot

TEOREMA 1.16 *(TEOREMA LUI CARNOT)*

Fie un triunghi ABC, $D \in (BC), E \in (AC), F \in (AB)$.Perpendicularele în D pe (BC), în E pe (AC) şi în F pe (AB) sunt concurente dacă şi numai dacă

$$DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0. \tag{1.28}$$

Relaţia (1.28) se numeşte **relaţia lui Carnot**.

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Presupunem că perpendicularele în D pe (BC), în E pe (AC) şi în F pe (AB) sunt concurente. Se formează triunghiurile dreptunghice DMB, DMC, EMC, EMA, AMF, FMB pentru care vom scrie teorema lui Pitagora obţinând relaţiile:

$$BM^2 = MD^2 + DB^2; \tag{1.29}$$

$$CM^2 = MD^2 + DC^2; \tag{1.30}$$

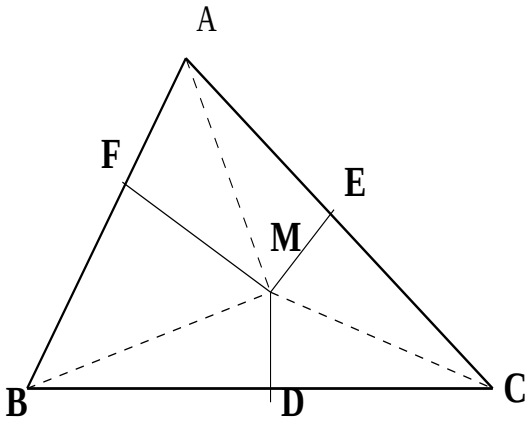

Figura 1.24: Relaţia lui Carnot

$$CM^2 = ME^2 + EC^2; \tag{1.31}$$

$$AM^2 = ME^2 + EA^2; \tag{1.32}$$

$$AM^2 = FA^2 + FM^2; \tag{1.33}$$

$$BM^2 = FM^2 + FB^2. \tag{1.34}$$

Scazând relaţiile două câte două obţinem:

$$BM^2 - CM^2 = DB^2 - DC^2;$$
$$CM^2 - AM^2 = EC^2 - EA^2;$$
$$AM^2 - BM^2 = FA^2 - FB^2.$$

Vom aduna aceste trei relaţii şi se va obţine relaţia lui Carnot.

" $\Leftarrow$" Presupunem că relaţia lui Carnot este adevărată, dar perpendicularele pe laturile triunghiului construite în punctele D, E, F nu sunt concurente.

Perpendicularele construite în două dintre aceste puncte sunt concurente, de exemplu cea construită în punctul D şi cea din E. Punctul lor de concurenţă va fi M.

Notăm proiecţia punctului M pe latura AB cu N. Conform implicaţiei directe care a fost demonstrată, putem scrie relaţia lui Carnot pentru punctele N, E, D:

$$DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + NA^2 - NB^2 = 0. \tag{1.35}$$

Conform ipotezei:

$$DB^2 - DC^2 + EC^2 - EA^2 + FA^2 - FB^2 = 0. \tag{1.36}$$

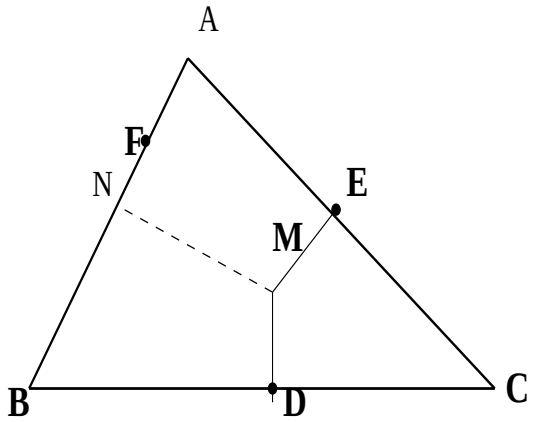

Figura 1.25:

Scăzând (1.28) şi (1.36), rezultă:

$$NA^2 - NB^2 = FA^2 - FB^2.$$

Notăm $BN = m$, $NF = x, AF = n$ şi relaţia anterioară va fi

$$(n + x)^2 - m^2 = n^2 - (m + x)^2$$

ceea ce implică $x = 0$, adică punctele N, F coincid. **q.e.d.**

1.6 Probleme de concurenţă

1.6.1 Metode de demonstrare a concurenţei unor drepte

Pentru a demonstra concurenţa a două sau mai multe drepte putem folosi una dintre următoarele metode:

1. folosind definiţia dreptelor concurente, adică să arătam că există un punct comun dreptelor;
2. concurenţa a trei drepte constă în a arăta că punctul de intersecţie a două drepte aparţine şi celei de a treia drepte;
3. pentru a demonstra concurenţa a trei drepte putem să folosim teoremele referitoare la concurenţa liniilor importante în triunghi;
4. folosind reciproca teoremei lui Ceva;
5. prin metoda analitică, folosind ecuaţiile analitice ale dreptelor;
6. pentru concurenţa a trei drepte, demonstrăm că se intersectează două câte două şi aria poligonului obţinut este 0.

1.6.2 Teoremele lui Gergonne

TEOREMA 1.17 *(TEOREMA LUI GERGONNE)*

Fie un triunghi ABC, $D \in (BC), E \in (AC), F \in (AB)$. Dacă AD, BE şi CF sunt concurente în punctul M atunci:

$$\frac{DM}{AD} + \frac{EM}{BE} + \frac{FM}{CF} = 1. \tag{1.37}$$

Demonstraţie. Notăm cu h_a distanţa de la punctul A la BC; cu d_a distanţa de la punctul M la BC; $\mathcal{A}_{BMC}$ aria triunghiului BMC şi cu $\mathcal{A}_{ABC}$ aria triunghiului ABC.

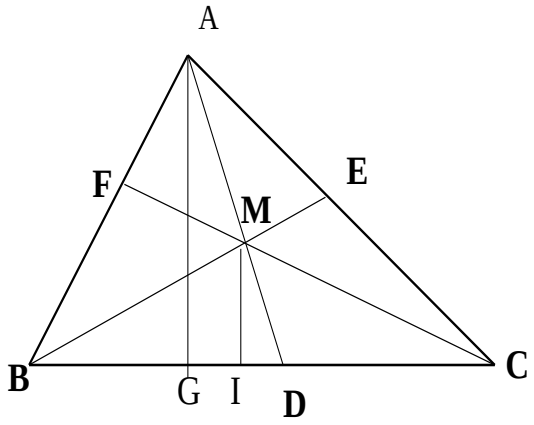

Figura 1.26: Teorema lui Gergonne

Se observă că $\dfrac{\mathcal{A}_{BMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \dfrac{d_a}{h_a}$ (au aceeaşi bază).

Se construiesc înălţimile AG pentru triunghiul ABC şi MI pentru triunghiul BMC. Se formează astfel triunghiurile asemenea AGD şi MID, pentru care putem scrie:

$$\frac{d_a}{h_a} = \frac{MD}{AD}. \tag{1.38}$$

Se obţine:

$$\frac{\mathcal{A}_{BMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{MD}{AD} \tag{1.39}$$

Prin procedee analoage se pot obţine:

$$\frac{\mathcal{A}_{AMB}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{MF}{CF}; \tag{1.40}$$

$$\frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{ME}{BE} \tag{1.41}$$

adunând relaţiile (1.39), (1.40), (1.41) vom obţine:

$$1 = \frac{\mathcal{A}_{BMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} + \frac{\mathcal{A}_{AMC}}{\mathcal{A}_{ABC}} + \frac{\mathcal{A}_{AMB}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{DM}{AD} + \frac{EM}{BE} + \frac{FM}{CF}.$$

q.e.d.

TEOREMA 1.18 *(PUNCTUL LUI GERGONNE)*

Fie cercul înscris în triunghiul ABC. Dacă M, N, P sunt punctele de tangenţă ale cercului cu laturile triunghiului, atunci AM, BN, CP sunt concurente în punctul lui Gergonne.

Pentru demonstraţie se foloseşte reciproca teoremei lui Ceva.

1.6.3 Teorema lui Steiner

Reamintim că o ceviană într-un triunghi este dreapta determinată de un vârf al triunghiului şi un punct de pe latura opusă.

Ceviene izogonale sunt cevienele egal înclinate faţă de laturile care pleacă din acelaşi vârf cu ele.

TEOREMA 1.19 *(TEOREMA LUI STEINER) Dacă AM, AN sunt ceviene izogonale în triunghiul ABC atunci are loc relaţia:*

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} \tag{1.42}$$

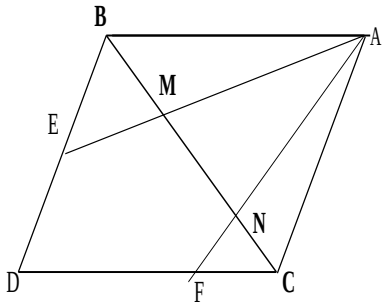

Figura 1.27: Teorema lui Steiner

Demonstraţie. Prin vârfurile B , respectiv C ale triunghiului ABC construim paralele la laturile opuse. Se obţine astfel paralelogramul $ABDC$.

Notăm $\{E\} = AM \cap BD$ şi $\{F\} = AN \cap CD$.

Cu teorema fundamentală a asemănării se obţine că $\frac{BE}{AC} = \frac{BM}{CM}$ şi $\frac{AB}{CF} = \frac{BN}{CN}$.

Relaţia de demonstrat devine $\frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}$, adevărată din asemănarea triunghiurilor ABE şi ACF.

q.e.d.

Un exemplu de ceviene izogonale sunt înalţimea dintr-un vârf şi diametrul cercului circumscris triunghiului, dus din vârful respectiv.

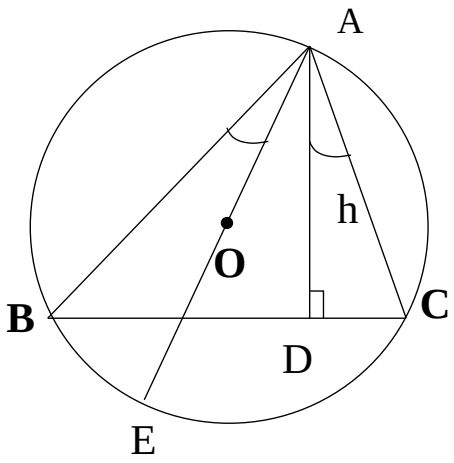

Figura 1.28: Ceviene izogonale

1.7 Relaţii metrice în triunghi şi patrulater

1.7.1 Teorema Pitagora generalizată

Este bine cunoscută teorema lui Pitagora, care se aplică în triunghiuri dreptunghice. Acum prezentăm generalizarea ei, numită şi teorema cosinusului, care se poate aplica în orice triunghi.

TEOREMA 1.20 *Dacă în triunghiul ABC, $\hat{C}$ este un unghi ascuţit şi $D = pr_{BC}A$, atunci:*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

Demonstraţie. Vom discuta 3 cazuri:
a) unghiul $\hat{B}$ este ascuţit, notăm cu $D = pr_{BC}A$, atunci $D \in (BC)$.
Triunghiurile ABD şi ADC sunt dreptunghice şi vom aplica teorema Pitagora:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \tag{1.43}$$

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 \tag{1.44}$$

$$BD = BC - DC. \tag{1.45}$$

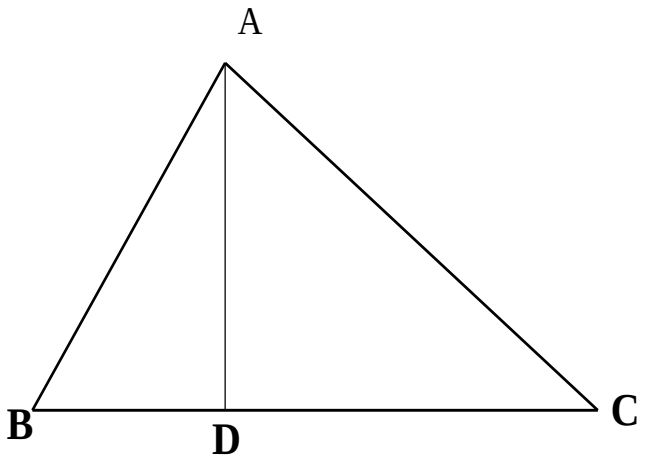

Figura 1.29: teorema lui Pitagora generalizată

Se înlocuieşte în (1.43) AD şi BD date de egalităţile (1.44) şi (1.45)

$$AB^2 = AC^2 - DC^2 + (BC - DC)^2,$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

a) dacă unghiul $\hat{B}$ este obtuz, atunci $B \in (DC)$. Egalităţile (1.43) şi (1.44) rămân

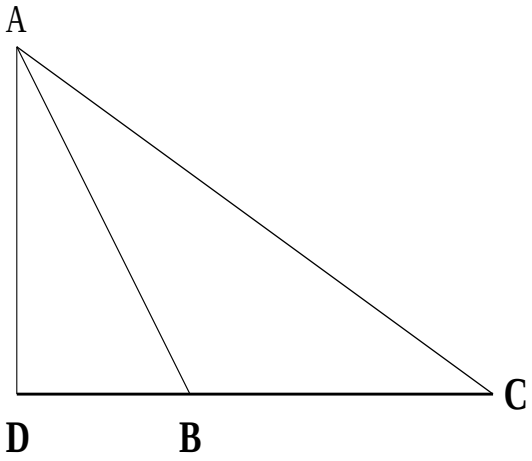

Figura 1.30: teorema lui Pitagora generalizată

adevărate şi

$$BD = DC - BC. \tag{1.46}$$

Înlocuind în (1.43) AD şi BD date de (1.44) şi (1.46) se obţine:

$$AB^2 = AC^2 - DC^2 + (DC - BC)^2,$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot DC.$$

c) pentru B unghi drept se aplică Pitagora. **q.e.d.**

1.7.2 Relaţia lui Stewart

Teorema lui Stewart furnizează o relaţie între lungimile laturilor unui triunghi şi lungimea segmentului care coboară dintr-un vârf la un punct de pe latura opusă.

TEOREMA 1.21 *(TEOREMA LUI STEWART) Fie un triunghi ABC cu lungimile*

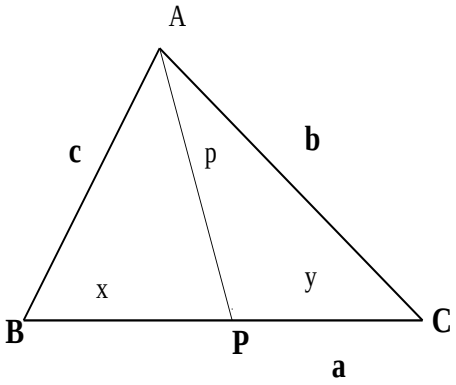

Figura 1.31: teorema Stewart

laturilor $BC = a, AC = b, AB = c$. Fie P un punct pe latura $[BC]$ care divide latura în două segmente cu lungimile $BP = x, PC = y$. Lungimea segmentului AP o vom nota cu p. Atunci:

$$a(p^2 + xy) = b^2x + c^2y. \tag{1.47}$$

Demonstraţie. Aplicăm teorema Pitagora generalizată în triunghiurile ABP şi APC corespunzătoare unghiurilor suplementare APB, respectiv APC şi adunăm relaţiile obţinute, dar nu înainte de a le înmulţi cu y respectiv x.

q.e.d.

1.7.3 Teorema medianei

În geometria plană, teorema medianei stabileşte o relaţie între lungimea unei mediane dintr-un triunghi şi lungimile laturilor triunghiului. Teorema medianei este un caz particular al teoremei lui Stewart.

TEOREMA 1.22 *Fie triunghiul ABC cu M mijlocul laturii (BC). Atunci:*

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \tag{1.48}$$

unde $m_a = AM, a = BC, b = AC, c = AB$.

COROLARUL 1.1 *Într-un triunghi dreptunghic lungimea medianei corespunzătoare unghiului drept este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.*

1.7.4 Relaţia lui Euler pentru patrulatere

TEOREMA 1.23 *Fie patrulaterul $ABCD$, E mijlocul diagonalei AC şi F mijlocul lui BD. Atunci:*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4EF^2. \tag{1.49}$$

Relaţia (1.49) se numeşte relaţia lui Euler pentru patrulatere.

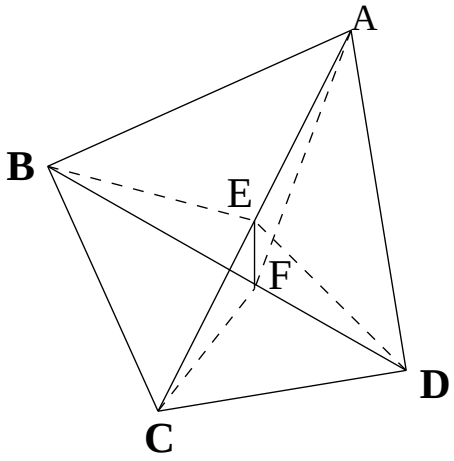

Figura 1.32: Relaţia Euler pentru patrulatere

Demonstraţie. Se construiesc AF, FC, BE, DE. Vom folosi teorema medianei în:

- triunghiul ABD:
$$4AF^2 = 2(AB^2 + AD^2) - BD^2; \tag{1.50}$$
- triunghiul BCD:
$$4CF^2 = 2(BC^2 + CD^2) - BD^2; \tag{1.51}$$
- triunghiul ABC:
$$4BE^2 = 2(AB^2 + BC^2) - AC^2; \tag{1.52}$$
- triunghiul ADC:
$$4DE^2 = 2(AD^2 + CD^2) - AC^2; \tag{1.53}$$
- triunghiul AFC:
$$4EF^2 = 2(AF^2 + FC^2) - AC^2; \tag{1.54}$$
- triunghiul BED:
$$4EF^2 = 2(BE^2 + ED^2) - BD^2. \tag{1.55}$$

Se adună relaţiile (1.50),(1.51), (1.52), (1.53) cu relaţiile (1.54), (1.55) înmulţite cu 2 şi se obţine (1.49).

q.e.d.

Capitolul 2

Transformări geometrice

Istoria matematicii consemnează că transformările geometrice au fost folosite pentru obţinerea primelor demonstraţii ale unor teoreme de geometrie.

Astfel se afirmă că Thales din Milet a demonstrat prin suprapunerea figurilor, folosind ideea de mişcare, tradusă astăzi în aceea de transformare geometrică, teoremele: unghiurile opuse la vârf sunt congruente; unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente; diametrul împarte cercul în două păţi congruente ş.a.

Mai târziu, Aristotel a eliminat mişcarea din geometrie şi deci şi transformările geometrice, considerând obiectele matematicii ca entităţi abstracte. Această concepţie a fost concretizată de Euclid prin celebra sa carte "Elementele", în care geometria este construită fără utilizarea ideii de mişcare pentru că aceasta nu poate exista, conform concepţiei lui Platon, Aristotel, Euclid, în lumea formelor ideale.

Pe aceeaşi linie s-a situat D. Hilbert în construcţia sistemului cunoscut de axiome ale geometriei. El a înlocuit ideea de mişcare cu ceea de figuri congruente.

Predarea geometriei în spiritul axiomaticii lui Hilbert sau a lui Birkhoff este implicată, indiscutabil, în diminuarea ponderii transformărilor geometrice în unele programe analitice şi manuale.

Intuiţia asigură înţelegerea de către elevi a noţiunilor de mişcare, suprapunere, transformare a figurilor, ceea ce favorizează înţelegerea ulterioară a unor concepte fundamentale din geometrie sau oferă o cale de a pătrunde în corpul teoremelor geometrice fără supoziţii complicate, greu de explicitat şi de motivat. Acest fapt indică posibilitatea de a introduce în geometrie transformările geometrice.

Transformările geometrice sunt în esenţă funcţii. Studiul lor este calea principală pe care noţiunea de funcţie pătrunde în geometrie.

Deşi transformările geometrice erau folosite de mult timp în rezolvarea unor probleme de geometrie, ele nu au fost gândite ca funcţii decât relativ recent, când figurile geometrice au fost concepute ca mulţimi de puncte.

Ca orice alte funcţii, transformările geometrice se pot compune. Există multe situaţii în care mulţimea transformărilor geometrice de un anumit tip este închisă

la compunere, formând un grup. Amintim grupul translaţiilor, grupul rotaţiilor de acelaşi centru, grupul asemănărilor. Aşadar transformările geometrice furnizează exemple netriviale de grupuri, fapt ce facilitează înţelegerea noţiunii abstracte de grup la algebră şi care indică rolul integrator al transformărilor geometrice cu algebra abstractă.

Primele obiective operaţionale care se urmăresc în predarea temei respective sunt:

- construirea imaginii unui punct printr-o anume transformare geometrică;

- determinarea punctelor ce corespund printr-o transformare care duce o figură într-o altă figură;

- remarcarea elementelor care determină o transformare geometrică: centrul simetriei, centrul şi unghiul rotaţiei, etc.;

- construirea imaginii unei figuri printr-o transformare geometrică.

Prin atingerea acestor obiective elevii capătă deprinderea de a folosi transformările geometrice în rezolvarea problemelor.

În funcţie de timpul disponibil, se poate aborda structura grupală a transformărilor geometrice şi teoreme de exprimare a unor transformări geometrice ca o compunere de transformări mai simple. De exemplu, orice izometrie este compunerea a cel mult trei simetrii axiale.

O structură geometrică suficient de simplă şi în acelaşi timp cu multe proprietăţi este structura metrică a planului (spaţiului) dată de distanţa dintre două puncte. Această structură are şi un accentuat caracter intuitiv, ceea ce permite utilizarea ei în clasele a VI-a şi a VII-a.Transformările geometrice compatibile cu structura metrică sunt interesante şi bogate în proprietăţi. Două asemenea clase de transformări sunt studiate cu precădere: izometriile şi asemănările.

Gândim spaţiul fizic obişnuit ca o mulţime de elemente numite puncte, notat cu S.

Distanţa este o aplicaţie , cu următoarele proprietăţi:

1. $d(A, B) \geq 0$ şi $d(A, B) = 0$ dacă şi numai dacă $A \equiv B$;

2. $d(A, B) = d(B, A)$

3. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, oricare ar fi punctele $A, B, C \in S$.

Aplicaţia $T : S \to S$ se numeşte **izometrie** dacă

$$d(TA, TB) = d(A, B),$$

adică păstrează distanţa între puncte şi

se numeşte **asemănare** dacă

$$d(TA, TB) = k \cdot d(A, B),$$

adică multiplică distanţa cu un factor real strict pozitiv k.

Orice izometrie este o asemănare particulară $(k = 1)$.

Totuşi în mod obişnuit, se face întâi studiul detaliat al izometriilor apoi cel al asemănărilor. Această ordonare pe lângă avantajul didactic evident de a se trece de la simplu la mai complicat este dictată şi de faptul că orice asemănare este compunerea unei izometrii cu o omotetie (o asemănare particulară). Teoreme asemănătoare pentru izometrii, de exemplu, orice izometrie a planului care păstrează orientarea este sau o translaţie, sau rotaţie, sau simetrie centrală, respectiv, orice izometrie este compunerea a cel mult trei simetrii axiale ne arată că e recomandabilă mai întâi studierea izometriei particulare (simetria, translaţia, rotaţia), apoi trecerea la stabilirea proprietăţilor generale ale izometriilor.

În urma analizei modalităţilor de a concepe predarea transformărilor geometrice în diferite programe şi manuale se pot distinge două puncte de vedere: sintetic şi vectorial- analitic.

Conform primului, transformările geometrice se definesc în mod direct, cu elemente geometrice simple: puncte, drepte, plane, unghiuri şi proprietăţile lor se demonstrează geometric pe baza axiomelor şi teoremelor simple de geometrie.

Al doilea punct de vedere se referă la introducerea transformărilor geometrice pe baza noţiunii de vector sau prin expresiile lor analitice, proprietăţile obţinându-se prin combinarea elementelor de algebră vectorială cu elemente de geometrie analitică.

În cele ce urmează vom explora succesiv ambele puncte de vedere pentru fiecare din izometriile remarcabile şi apoi pentru asemănări.

2.1 Simetrii

În mod natural trebuie să începem cu studiul simetriilor în plan, apoi să trecem la spaţiu.

Simetria faţă de un punct în plan

- Putem începe prin a cere elevilor (clasa a VI-a) să deseneze mai multe segmente care au acelaşi mijloc O. Ei desenează măsurând cu rigla sau eventual cu compasul (dacă sunt familiarizaţi cu acest instrument) o figură asemănătoare cu figura 2.1, care poate fi apoi prezentată şi pe o planşă pregătită anterior.
- Cu notaţiile introduse în figura 2.1, vom spune că A' este simetricul punctului A faţă de O, că B' este simetricul punctului B faţă de O, la fel C' este simetricul lui C faţă de O ş.a.m.d.
- Subliniem că O este mijlocul pentru segmentele AA', BB', CC' etc, şi repetăm modul de construcţie al punctelor A', B', etc.

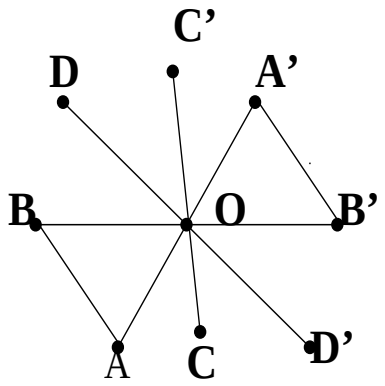

Figura 2.1: Simetria faţă de un punct

Fixăm apoi definiţia formală:

simetricul unui punct M faţă de un punct O este un punct M', astfel că O este mijlocul segmentului MM'; simetricul lui O este O.

- Alternativ, pentru a pregăti ideea de funcţie putem spune că oricărui punct M din plan putem să-i asociem un punct M', simetricul său faţă de O; lui O i se asociază O însuşi.

  Aici sau la o reluare într-o clasă superioară această asociere o vom numi simetrie de centru O şi o vom nota prin S_O, pentru a indica centrul de simetrie, scriind $A' = S_O(A), B' = S_O(B)$, etc.

- Revenind la figura 2.1, din paralelogramul $ABA'B'$ (diagonalele se înjumătăţesc) constatăm că segmentul $A'B'$ este congruent cu segmentul AB, adică simetria faţă de O (numită şi simetrie de centru O, sau simetrie centrală) este o izometrie.

- Spunem apoi că dreapta $A'B'$ este simetrica dreptei AB faţă de punctul O şi subliniem că ea este paralelă cu dreapta AB. La fel dreapta $A'C'$ este simetrica dreptei AC faţă de O. Deci simetrica unei drepte faţă de un punct O se obţine construind simetricele a două puncte distincte ale ei şi apoi unindu-le.

- Observăm că dacă M' este simetricul faţă de O al punctului M, atunci simetricul faţă de O al punctului M' este chiar M.

  Mai târziu vom scrie $S_O^2 = I$, unde I este transformarea identică a planului şi vom spune că S_O este transformare involutivă.

- Fie acum d o dreaptă oarecare din plan. Dacă ea trece prin O, simetrica ei faţă de punctul O coincide cu ea ca mulţime (nu punct cu punct). Cu alte cuvinte, simetricul oricărui punct de pe d se află pe d. Vom spune că O situat pe d este centru de simetrie pentru figura formată din dreapta d.

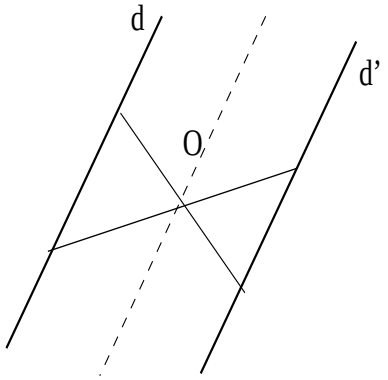

Figura 2.2: Simetrica unei drepte faţă de un punct

Presupunem că O nu este situat pe d. Simetrica dreptei d faţă de O este o dreaptă d' paralelă cu d. Figura $F = d \cup d'$ are proprietatea că simetricul oricărui punct al ei faţă de O este tot pe ea, figura 2.2. Vom spune că O este centru de simetrie al figurii F.

Cele observate pot fi formulate astfel:

DEFINIŢIA 2.1 *Spunem că o figură F admite ca centru de simetrie un punct O, dacă simetricul faţă de O al oricărui punct al figurii F se află în F.*

După cum am văzut mai sus:

-oricare punct al unei drepte este centru de simetrie pentru ea, adică dreapta are o infinitate de centre de simetrie.

Figura formată din două drepte care se intersectează în O are ca centru de simetrie pe O şi numai pe el.

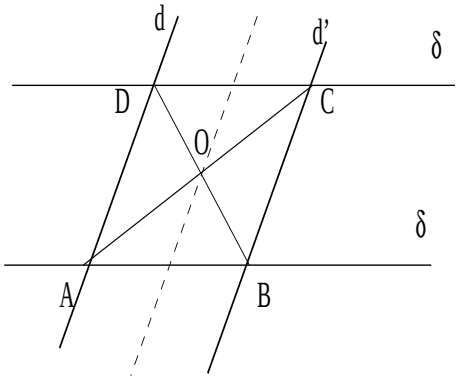

Figura 2.3: Centru de simetrie

Din figura 2.2 rezultă că figura formată din reunirea a două drepte paralele are o infinitate de centre de simetrie, situate pe o dreaptă. Reunind aceste două drepte

cu alte două drepte paralele între ele, dar formând un anumit unghi cu primele două obţinem o figură cu un singur centru de simetrie (figura 2.3).

Rezultă că în particular, paralelogramul are un singur centru de simetrie.

Unghiul, înţeles ca reuniunea a două semidrepte cu originea comună, nu are centru de simetrie.

Centrele de simetrie sunt importante în aplicaţiile geometriei în practică.

Într-o abordare vectorial-analitică a geometriei, simetria faţă de un punct O se poate defini astfel:

simetricul lui A faţă de O este un punct A', astfel ca $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$.

Gândim simetria faţă de O direct ca aplicaţie: $A \to A'$, definită de relaţia vectorială de mai sus. Fie B' simetricul faţă de O al unui punct B diferit de A.

Egalităţile vectoriale

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{AB}$$

ne arată că simetria faţă de O păstrează coliniaritatea punctelor, duce o dreaptă într-o dreaptă paralelă cu ea şi că este izometrie.

Remarcăm că relaţiile vectoriale au avantajul de a da informaţii mai multe într-o formă condensată.

Pentru a deduce ecuaţiile simetriei vom introduce un reper cartezian în plan. Cel mai simplu este să luăm originea sa în O.

Fie $A(x, y)$ şi $A'(x', y')$. Relaţia vectorială de definire a simetriei faţă de O conduce la:

$$x = -x, \quad y' = -y \tag{2.1}$$

Aceste formule se numesc **ecuaţiile simetriei** faţă de origine.

Rezultă că o figură din plan descrisă de o expresie algebrică $E(x, y)$ are originea ca centru de simetrie dacă şi numai dacă $E(-x, -y) = E(x, y)$.

Dacă O are coordonate oarecare (x_0, y_0), aceeaşi relaţie de definire a simetriei faţă de O conduce a formulele

$$x' = 2x_0 - x, \quad y' = 2y_0 - y. \tag{2.2}$$

Aceste formule pot fi luate ca definiţie a simetriei centrale.

Simetria faţă de o dreaptă în plan

Pentru a introduce definiţia acestei transformări geometrice la clasa a VI-a putem începe cu următoarea semiexperienţă:

- în partea superioară a unei coli albe de hârtie se fac trei - patru pete mici de cerneală, apoi coala se îndoaie. Petele de cerneală vor lăsa urme pe partea inferioară a colii.
- Dezdoim coala şi unim cu o linie colorată fiecare pată cu urma lăsată de ea la îndoirea colii.
- Trasăm cu o altă culoare linia de îndoire a colii. Dreptele duse anterior vor intersecta linia de îndoire după nişte puncte.
- Cerem elevilor să măsoare, pentru fiecare pată în parte, distanţa de la ea şi de la urma ei la dreapta de îndoire. Vor constata că aceste distanţe sunt aproximativ egale şi că dreapta ce uneşte o pată cu imaginea ei (cu urma ei) este perpendiculară pe linia de îndoire a colii.
- Reprezentăm coala cu care am lucrat ca în figura 2.4, inroducem notaţii şi afirmăm că dreptele AA', BB', CC' şi DD' sunt perpendiculare pe d şi că

$$(AP) \equiv (PA'), (BQ) \equiv (QB'), (CR) \equiv (RC'), (DS) \equiv (SD').$$

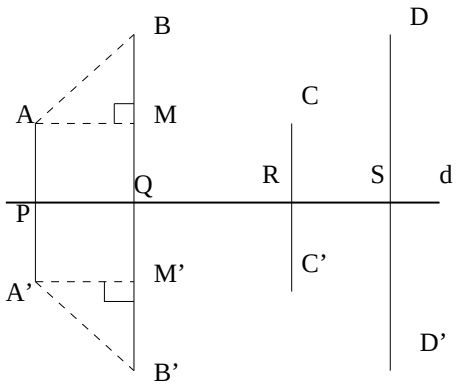

Figura 2.4: Simetria faţă de o dreaptă

Vom spune că A' este simetricul lui A faţă de dreapta d şi că B' este simetricul lui B faţă de dreapta d, ş.a.m.d.

- Punctul A' se mai poate construi astfel:

  Ducem din A perpendiculara pe d şi prelungim segmentul (AP) cu un segment $(PA') \equiv (AP)$.

  Precizăm apoi, dacă e cazul, cum se efectuează această construcţie cu rigla şi compasul.
- Se constată că simetricul oricărui punct faţă de dreapta d este unic determinat; simetricul unui punct de pe d faţă de d este el însuşi.

Asociind unui punct din plan simetricul său faţă de dreapta d, obţinem o funcţie care va fi numită **simetria faţă de dreapta** d, notată cu S_d.

Dacă A' este simetricul lui A faţă de d, vom spune că şi punctele A şi A' sunt simetrice faţă de dreapta d, $A' = S_d(A)$.

- Din figura 2.4 rezultă că două puncte sunt simetrice faţă de dreapta d, dacă d este mediatoarea segmentului ce le uneşte. Această observaţie poate fi luată ca definiţie.

- Completând figura 2.4 cu linii punctate, din două triunghiuri dreptunghice congruente constatăm că $AB = A'B'$.

  Întrucât punctele A şi B sunt arbitrare deducem că simetria faţă de o dreaptă este o izometrie.

- Studiem apoi imaginile printr-o simetrie faţă de o dreaptă dată (numită şi **simetrie axială**) a diferitelor figuri geometrice, în funcţie de cunoştinţele elevilor la momentul respectiv. Remarcăm, unde este cazul, congrueţa elementelor ce corespund prin simetrie axială.

Revenind la figura 2.4, fixăm atenţia asupra trapezului isoscel $B'B'AA$. Punctele de pe segmentul (AB) sunt duse prin S_d în puncte de pe $A'B'$, iar punctele de pe segmentul AA' sunt duse prin S_d în puncte de pe acelasi segment. Similar pentru (BB'). Aşadar, oricare punct de pe trapez are imaginea prin S_d tot pe trapez.

- Vom spune ca trapezul în discuţie are o axă de simetrie: dreapta d.

Fie un cerc de centru O şi MN un diametru al său. Simetricul oricărui punct de pe cerc faţă de MN este pe cerc (diametrul este mediatoarea oricărei coarde perpendiculară pe el). Vom spune că diametrul MN este axă de simetrie a cercului dat.

- Orice diametru al cercului este axă de simetrie pentru cerc, deci cercul admite o infinitate de axe de simetrie.

Situatiile prezentate impun următoarea definiţie.

DEFINIŢIA 2.2 *O figură plană F admite o axă de simetrie d, dacă simetricul oricărui punct din F faţă de d este în F.*

- Căutăm apoi alte figuri plane care admit axe de simetrie. În această căutare ne poate ajuta următoarea observaţie.

Observaţia 2.1 *Dacă F' este simetrica unei figuri F faţă de o dreaptă d, atunci figura $F \cup F'$ are ca axă de simetrie pe d.*

De exemplu, fie o dreaptă a care face un anumit unghi α (diferit de unghiul nul) cu d şi o intersecteaza în O. Notăm cu a' simetrica ei faţă de d.

Dacă $\alpha = 90^\circ$, atunci a coincide cu a' şi putem spune ca d este axă de simetrie pentru a. Rezultă că dreapta a are o infinitate de axe de simetrie: dreptele perpendiculare pe ea.

Un segment nenul are o singura axă de simetrie - mediatoarea sa;

axa de simetrie a unei semidrepte este perpendiculara pe ea în originea ei (în baza observaţiei de mai sus).

Dacă măsura lui α este diferită de 90°, atunci $a \cup a'$ este figura formată din patru unghiuri opuse, două câte două, la vârf. Dreapta d apare ca axă de simetrie pentru două dintre ele, pentru care este şi bisectoare. Rezultă că orice unghi are o axă de simetrie: bisectoarea sa.

Dacă presupunem acum că dreapta a este paralela cu d, atunci a' este şi ea paralela cu d. Rezultă că figura formată din două drepte paralele admite o axă de simetrie.

Fie b şi b' două drepte paralele şi perpendiculare pe d. Axa lor de simetrie d' va fi perpendiculara pe d. Prin reunirea celor patru drepte a, a', b, b' obţinem un dreptunghi completat cu nişte semidrepte. Rezultă că figura are două axe de simetrie d şi d'.

Orice dreptunghi are două axe de simetrie perpendiculare între ele.

- Prezentarea unor planşe cu figuri plane care admit axe de simetrie poate fi utilă.
- Rezolvarea unor probleme de geometrie prin folosirea simetriei faţă de o axă este pasul următor.

Simetria faţă de o dreaptă se pretează, ca şi simetria centrală, la o tratare vectorială şi analitică. Definiţia ei vectorială se poate da folosind vectorul de direcţie al dreptei (axei de simetrie). Proprietăţile ei se demonstrează în mod specific.

Tratarea vectorială a simetriei axiale nu aduce simplificări. Dimpotrivă, în multe locuri apare complicată şi artificială. Ea este recomandabilă numai dacă insistăm să tratăm unitar (vectorial în acest caz) toate transformările geometrice.

Analitic, prin introducerea unui reper în plan, putem exprima coordonatele simetricului unui punct dat faţă de o dreapta d, în funcţie de coordonatele punctului dat şi de elementele care determină dreapta d. Formulele care se obţin sunt în general complicate şi nu pot fi reţinute. Excepţie, face situaţia în care reperul se alege astfel încât dreapta d să fie una din axele de coordonate.

Dacă d coincide cu axa absciselor, ecuaţiile simetriei S_d sunt:

$$x' = x, \quad y' = -y,$$

iar dacă d coincide cu axa ordonatelor obţinem

$$x' = -x, \quad y' = y.$$

Aceste ecuaţii vor folosi la reprezentarea grafică a funcţiilor în studiul simetriilor graficului.

2.2 Translaţia

Această transformare geometrică este cu mult mai importantă decât simetriile, pentru că definirea şi studiul ei impun conceptul de vector în forma sa riguroasă: clasă de segmente orientate echipolente (de aceeaşi lungime, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens).

În general, în cărţile în care acest subiect se abordează, se introduce izomorfismul între grupul translaţiilor (cu operaţia de compunere) şi grupul aditiv al vectorilor.

Câteva observaţii se impun de la început.

Pentru noţiunea de vector cadrul cel mai convenabil este spaţiul şi nu planul. În consecinţă apare mai natural studiul translaţiei ca transformare a spaţiului. Vectorii dintr-un plan se vor identifica cu translaţiile care duc planul în sine. Evident că această abordare este posibilă după ce elevii au anumite cunoştinţe de geometria spaţiului.

Intuitiv translaţia în spaţiu se defineşte ca o transformare prin care toate punctele se deplasează în una şi aceeaşi direcţie, într-un sens dat, la aceeaşi distanţă. Evident că este mai greu de sesizat deplasarea simultană a tuturor punctelor spaţiului decât a unei submulţimi (figuri) a lui.

În consecinţă este mai bine să începem prin a spune că o figură F' s-a obţinut dintr-o figură F printr-o translaţie dacă punctele ei s-au obţinut din cele ale lui F prin deplasare în una şi aceeaşi direcţie, într-un sens dat, la aceeaşi distanţă. Aceste aspecte intuitive se cer sprijinite de figuri variate. Credem că un scurt film de desene animate, bine realizat, ar putea fi util în sprijinirea intuiţiei elevilor.

O primă formalizare a consideraţiilor intuitive se poate da astfel:

figurile F şi F' corespund printr-o translaţie dacă oricare ar fi punctele P şi Q distincte din F lor le corespund în mod unic punctele P' şi Q' din F', astfel încât segmentele (PP') şi (QQ') să fie congruente, paralele şi de acelaşi sens.

Ca aplicaţie a spaţiului S pe el însuşi, translaţia poate fi definită prin:

DEFINIŢIA 2.3 *O aplicaţie*

$$\tau : S \to S$$

se numeşte translaţie, dacă oricare ar fi punctele distincte

$$P, Q \in S, \quad P' = \tau(P), Q' = \tau(Q),$$

segmentele (PP') şi (QQ') sunt congruente, paralele şi de acelaşi sens.

Dacă R este un al treilea punct din S, diferit de P, Q şi $R' = \tau(R)$, rezultă că segmentele $(RR'), (PP')$ şi (QQ'), sunt congruente între ele, paralele între ele şi de acelaşi sens. Din definiţia de mai sus rezultă că şi figura $PP'Q'Q$ este un paralelogram, deci segmentele $(P'Q')$ şi (PQ) sunt de asemenea paralele şi congruente.

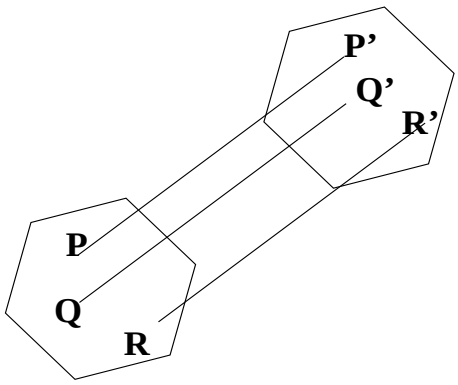

Figura 2.5: Translaţia

În concluzie, translaţia este o izometrie. Din proprietăţile generale ale izometriilor rezultă că

- imaginea unei drepte d este o dreaptă d', $\tau(d) = d'$, paralelă cu d;
- imaginea unui segment printr-o translaţie este un segment;
- imaginea unui unghi printr-o translaţie este un unghi congruent cu el;
- imaginea unui triunghi printr-o translaţie este un triunghi congruent cu el;
- imaginea unui cerc cu centrul O şi rază r printr-o translaţie este un cerc cu raza r şi centrul în O', translatatul lui O prin translaţia considerată;
- imaginea unui plan printr-o translaţie este un plan paralel cu el sau chiar el.

Compunerea a două translaţii τ şi σ.
Pentru două puncte distincte P şi Q din spaţiu, notăm

$$P' = \tau(P), Q' = \tau(Q), P" = \sigma(P'), Q" = \sigma(Q').$$

Corespondenţa $P \to P", Q \to Q"$ se bucură de proprietatea că segmentele $(PP")$ şi $(QQ")$ sunt congruente, paralele şi de acelaşi sens. Acest fapt rezultă uşor în urma analizei mai multor cazuri, de exemplu fig. 2.6, în care $\Delta PP'P" \equiv \Delta QQ'Q"$ sunt congruente şi au laturile respectiv paralele. Cum punctele P şi Q erau arbitrare, consideraţiile de mai sus pot fi aplicate la oricare alte perechi de puncte.

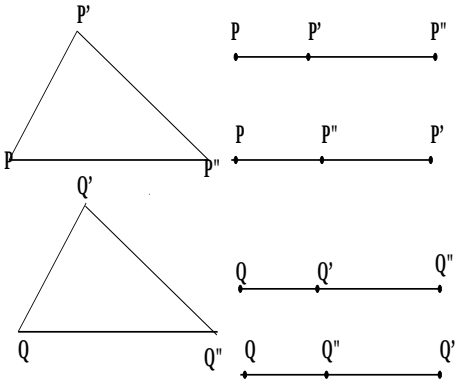

Figura 2.6:

Aşadar, corespondenţa $P \to P$", $Q \to Q$" etc. defineşte o translaţie pe care o vom nota prin $\sigma \circ \tau$ şi o vom numi compunerea translaţiilor τ şi σ.

Cu notaţiile precedente avem $\sigma \circ \tau(P) = \sigma(\tau(P))$ pentru orice punct P din spaţiu.

Fiind dată translaţia τ, definită de corespondenţa $P \to P', Q \to Q'$ etc., se constată uşor că asocierea $P' \to P, Q' \to Q$, e.t.c. defineşte o translaţie pe care o vom nota cu τ^{-1} şi o vom numi inversa translaţiei τ.

Considerând aplicaţia identică drept translaţie particulară suntem în poziţia de a pune în evidenţă grupul translaţiilor spaţiului.

Studiul translaţiilor este incomplet fără a stabili legătura lor cu noţiunea de vector. În consideraţiile de mai sus avem suficiente motive pentru introducerea noţiunii de vector. În definirea unei translaţii prin corespondenţa $P \to P', Q \to Q'$ etc. subînţelegem că segmentele $(PP'), (QQ'), (RR')$ etc. sunt perechi ordonate de puncte. Vom spune că segmentele în discuţie sunt orientate, primul punct va fi numit origine şi al doilea extremitate a segmentului orientat.

Recitind definiţia translaţiei constatăm că o translaţie este caracterizată de ceea ce au în comun segmentele orientate $(PP'), (QQ')$ etc., adică lungime, direcţie şi sens.

DEFINIŢIA 2.4 *Se numeşte vector o mulţime de segmente orientate care au aceeaşi lungime, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens.*

Vom nota vectorul prin $\overline{PP'}$ şi vom spune că segmentul orientat (PP') este un reprezentant al vectorului $\overline{PP'}$. Oricare alt segment orientat din mulţimea respectivă reprezintă vectorul $\overline{PP'}$. Aşadar o translaţie este caracterizată de un vector $\bar{u} = \overline{PP'}$ şi în continuare vom indica translaţia prin vectorul ce o caracterizează, spunând: *translaţia de vector* $\overline{PP'}$.

Este cu totul natural să spunem că doi vectori sunt egali dacă mulţimile de segmente orientate care îi definesc sunt egale.

Considerăm translaţiile τ şi σ definite respectiv de vectorii $\overline{PP'}$ şi $\overline{P'P"}$. Com-

pusa lor $\sigma \circ \tau$ este definită (caracterizată) de vectorul $\overline{PP''}$. Avem astfel posibilitatea unei perechi de vectori $\overline{PP'}$ şi $\overline{P'P``}$ să asociem un al treilea vector $\overline{PP''}$ , numit suma vectorilor $\overline{PP'}$ şi $\overline{P'P``}$.

Este posibil să folosim o altă cale pentru introducerea noţiunii de vector, situaţia în care translaţia se defineşte astfel:

DEFINIŢIA 2.5 *Se numeşte translaţie de vector $\bar{u}$ o aplicaţie*

$$T_{\bar{u}} : S \to S,$$

$T_{\bar{u}}(P) = P'$ *astfel ca* $\overline{PP'} = \bar{u}$

Se stabilesc apoi proprietăţile translaţiei folosind proprietăţi ale vectorilor. Caracterizarea translaţiei printr-un vector conduce imediat la teorema:

TEOREMA 2.1 *Date fiind două puncte distincte A şi A' există o translaţie unică ce duce A în A'.*

Aceasta este evident translaţia de vector $\overline{AA'}$.

Consideraţiile de mai sus pot fi repetate identic pentru un plan fixat. Obţinem astfel noţiunea de translaţie în plan, cea de vector în plan. Alternativ, având noţiunile precedente în spaţiu putem să ne punem problema restricţiei lor la un plan sau o dreaptă. Astfel translaţiile care duc un plan π în sine se vor numi translaţii ale planului π. Corespunzător, doi sau mai mulţi vectori sunt coplanari dacă există reprezentanţi ai lor în acelaşi plan.

Pentru reprezentarea translaţiei în coordonate considerăm un plan fixat în care am introdus un sistem cartezian de coordonate. Orice vector din plan este caracterizat de o pereche de numere reale.

Fie translaţia de vector $\bar{u} = (a, b)$ care aplică $P(x, y)$ în $P'(x', y')$. Aşadar, avem $\overline{PP'} = \bar{u}$ sau $\overline{OP'} - \overline{OP} = \bar{u}$,

unde O este originea sistemului de coordonate.

Ultima relaţie vectorială este echivalentă cu relaţiile:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ecuaţiile (2.3) se numesc ecuaţiile translaţiei de vector $\bar{u}$. Ele pot fi luate şi ca definiţie a translaţiei în plan.

2.3 Rotaţia în plan

Această transformare geometrică, relativ uşor de definit formal, are la bază un fond de reprezentări intuitive extrem de complex: cele care duc la ideea de cerc, cele referitoare la unghiuri şi măsura unghiurilor, mişcarea de rotaţie tratată la fizică ş.a.

- Înainte de a introduce această temă trebuie să ne asigurăm că elevii posedă fondul necesar de reprezentări intuitive, întărindu-l şi orientându-l spre abordarea temei în discuţie. În acest caz sunt utile figuri convenabile şi exemple simple de mişcări de rotaţie în jurul unui punct întâlnite curent de elevi (acele de ceasornic, roţile de transmisie, ...). Se pot de asemenea construi modele specifice care să reprezinte imaginile prin rotaţie ale unor figuri simple.

- Vom începe prin a considera rotaţia de un unghi dat în jurul unui punct dat a unei figuri geometrice simple. Cel mai simplu pare a fi să considerăm o semidreaptă de origine O şi să discutăm despre rotaţiile ei în jurul punctului O.

  Fie deci semidreapta $(OA$ pe care o rotim în poziţia $(OA'$. Înţelegem pentru moment cuvântul "rotim" în sens cinematic pe baza unor reprezentări intuitive. La rotirea semidreptei $(OA$ punctul A descrie un arc de cerc AA', figura 8. Un alt punct M, de pe semidreapta $(OA$, în urma aceleiaşi rotaţii va ajunge în M' după ce descrie un arc de cerc MM'.

- Observăm că unghiurile $\widehat{AOA'} \equiv \widehat{MOM'}$ şi congruente cu unghiul format de semidreptele $(OA$ şi $(OA'$. În plus, segmentele (OA) şi (OA') sunt congruente. La fel sunt şi segmentele $(OM) \equiv (OM')$.

  Dacă unghiul $\widehat{AOA'}$ are măsura α (grade) vom spune că A' a fost obţinut din A printr-o rotaţie de unghi α în jurul punctului O. Similar s-a obţinut M' din M. Semidreapta $(OA$ este obţinută la fel. Vom nota această transformare prin $\mathcal{R}_O^\alpha$

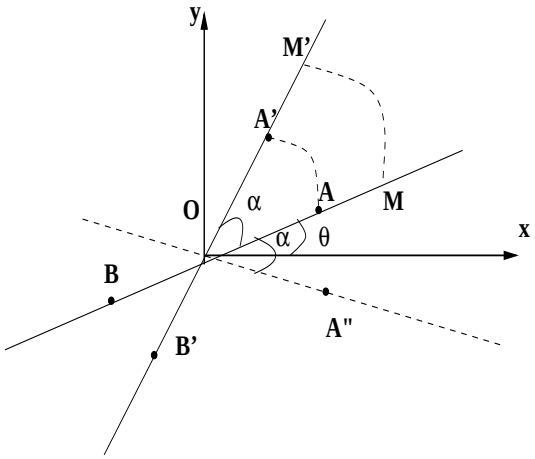

Figura 2.7: Rotaţia

  şi vom scrie $\mathcal{R}_O^\alpha(A) = A', \mathcal{R}_O^\alpha(M) = M'$ etc.

Am obţinut astfel o definiţie a rotaţiei în jurul unui punct, dar pe o figură care are mai multe particularităţi. Astfel pentru a obţine semidreapta $(OA'$ am rotit semidreapta

(OA în sens invers acelor de ceasornic. Acest sens este cel uzual numit şi sens direct trigonometric. Puteam să fi rotit (OA şi în sensul acelor de ceasornic în poziţia (OA". Completăm fig. 8 cu linii punctate. Alegem noua poziţie încât unghiurile $\widehat{AOA'} \equiv \widehat{AOA}$". Ele au aceeaşi măsură α, fapt care generează confuzie dacă luăm ca definiţie a rotaţiei pe cea dată mai sus. Trebuie ca în acea definiţie să introducem elemente care să ne permită distingerea celor două sensuri de rotaţie. Se poate proceda astfel:

DEFINIŢIA 2.6 *Spunem că unghiul $\widehat{AOA'}$ este orientat dacă perechea de semidrepte (OA şi (OA' este ordonată.*

Deci unghiul orientat $\widehat{AOA'}$ este diferit de unghiul orientat $\widehat{A'OA}$.

Vom spune că unghiul orientat $\widehat{AOA'}$ este orientat pozitiv dacă sensul de rotaţie de la semidreapta (OA spre semidreapta (OA' este opus mişcării acelor de ceasornic.

Dacă măsura unghiului neorientat $\widehat{AOA'}$ este α vom spune că măsura unghiului orientat $\widehat{AOA'}$ este α sau $-\alpha$, după cum el este orientat pozitiv sau negativ.

Amintim că mulţimea de valori a funcţiei măsură a unghiurilor este intervalul $[0^\circ, 180^\circ]$. Prin procedeul de mai sus am extins acest interval la $[-180^\circ, 180^\circ]$.

Rotaţiile în acelaşi sens cu acele de ceasornic vor fi descrise de unghiuri negativ orientate, deci de măsuri în intervalul $[-180^\circ, 0^\circ]$.

Continuând rotaţia semidreptei (OA' după poziţia (OA' în sens pozitiv ajungem în poziţia (OB încât unghiul $\widehat{AOB}$ este alungit (are măsura 180°)(figura 2.7). Putem continua rotaţia în acelaşi sens şi ajungem, de exemplu, în poziţia (OB'. Unghiul neorientat dintre (OA şi (OB' este $180^\circ - \alpha$. Dar pentru a descrie rotaţia efectuată suntem obligaţi să folosim unghiul orientat $\widehat{AOB}$ căruia este normal să-i asociem mărimea $180^\circ + \alpha$. Deci putem considera ca mulţime a valorilor pentru funcţia-măsură a unghiurilor orientate intervalul $[-360^\circ, 360^\circ]$. Intuiţia ne spune că obţinem (OA' din (OA printr-o rotaţie de unghi $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$ ca în figura 8, dar şi că aceeaşi semidreaptă poate fi obţinută după ce (OA efectuează n rotaţii complete în jurul lui O şi apoi o rotaţie de unghi α .

În al doilea caz vom spune că unghiul orientat $\widehat{AOA'}$ are măsură $\alpha + n \cdot 360^\circ$, dacă rotaţiile sunt pozitive şi are măsura $\alpha - n \cdot 360^\circ$, dacă rotaţiile sunt negative. Putem aşadar spune că măsura unui unghi orientat este $\alpha + k \cdot 360^\circ$ sau $\alpha + 2k \cdot \pi$ în radiani, unde k este un număr întreg.

DEFINIŢIA 2.7 *Rotaţia de centru O şi unghi orientat α a planului este o transformare a planului prin care O se transformă în el însuşi şi orice alt punct A se transformă într-un punct A', astfel încât $(OA) \equiv (OA')$ şi unghiurile α şi $\widehat{AOA'}$ sunt congruente şi au aceeaşi orientare.*

Din punct de vedere cinematic este preferabil să indicăm rotaţia printr-un unghi de forma $\alpha + k \cdot 360^\circ$ cu $\alpha \in [-360^\circ, 360^\circ]$ pentru a citi câte rotaţii s-au efectuat şi în ce sens, informaţii date de valoarea absolută şi de semnul lui $k \in Z$. Geometric, rotaţiile de unghi $\alpha + k \cdot 360^\circ$ cu $k \in Z$ coincid şi în continuare ele vor fi identificate cu rotaţia de unghi α.

Este acum uşor să dovedim, folosind triunghiuri congruente, că:

PROPOZIŢIA 2.1 *Orice rotaţie în plan este o izometrie.*

Rezultă că o rotaţie:

- duce o dreaptă într-o dreaptă;
- duce o semidreaptă într-o semidreaptă;
- duce un unghi într-unul congruent cu el;
- duce un cerc cu centrul O şi rază r într-un cerc cu aceeaşi rază şi centrul în O' transformatul prin rotaţie al lui O.

Se pot demonstra următoarele afirmaţii:

- Compusa a două rotaţii de acelaşi centru $\mathcal{R}_O^\alpha$ şi $\mathcal{R}_O^\beta$ este rotaţia $\mathcal{R}_O^{\alpha+\beta}$.
- Inversa rotaţiei $\mathcal{R}_O^\alpha$ este rotaţia $\mathcal{R}_O^{-\alpha}$.
- Mulţimea rotaţiilor cu acelaşi centru împreuna cu compunerea formează un grup.

Introducem în figura 2.7 un sistem cartezian de coordonate, încât unghiul între Ox şi (OA să fie θ . Dacă $A(x, y)$ şi $A'(x', y')$, notând $OA = OA' = r$, obţinem

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

şi

$$x' = r\cos(\theta + \alpha), y' = r\sin(\theta + \alpha).$$

Folosind formule uzuale de trigonometrice, obţinem

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases} \tag{2.4}$$

Aceste formule, numite şi reprezentarea analitică a rotaţiei $\mathcal{R}_O^\alpha$, ele pot fi luate ca definiţie a rotaţiei $\mathcal{R}_O^\alpha$.

2.4 Proprietăţi generale ale izometriilor

În majoritatea programelor analitice de geometrie din învâţământul preuniversitar, după parcurgerea izometriilor particulare menţionate mai sus, nu se mai găseşte timp pentru noţiunea generală de izometrie şi pentru câteva din proprietăţile ei. Considerăm că această situaţie lipseşte pe elevi de posibilitatea de a relua şi aprofunda unele cunoştinţe de bază din geometrie, de sinteza utilă în procesul de integrare a cunoştinţelor la nivelul geometriei şi cu alte discipline matematice studiate în şcoală.

Este necesar ca în clasele terminale de liceu, când noţiunea de funcţie este pe deplin consolidată, să se rezerve un număr de 4-6 ore pentru tratarea proprietăţilor generale ale izometriilor, ocazie cu care să se reamintească izometriile particulare întâlnite în clasele anterioare. Schiţăm mai jos o posibilitate de abordare a acestui subiect.

După actualizarea funcţiei distanţă, definim noţiunea de izometrie. Proprietăţile generale pe care le avem în vedere pot fi tratate direct în spaţiu. Am definit anterior izometria ca aplicaţie care păstrează distanţa. Din definiţie rezultă că orice izometrie este bijectivă, dar surjectivitatea se demonstrează greoi, încât este de preferat să o introducem în definiţie.

DEFINIŢIA 2.8 *O aplicaţie $f : S \to S$ a spaţiului în el însuşi se numeşte* **izometrie***, dacă este surjectivă şi păstrează distanţa, adică*

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \quad \forall A, B \in S. \tag{2.5}$$

TEOREMA 2.2 *Orice izometrie a spaţiului este bijectivă şi inversa ei este de asemenea izometrie.*

Demonstraţie. Într-adevăr, $f(A) = f(B)$ implică $d(A, B) = 0$, de unde $A = B$, adică f este injectivă.

Dacă $f(A) = A'$ şi $f(B) = B'$ atunci $f^{-1}(A') = A, f^{-1}(B') = B$ şi (2.5) se rescrie

$$d(f^{-1}(A'), f^{-1}(B')) = d(A', B'),$$

deci f^{-1} este izometrie. **q.e.d.**

Definiţia precedentă se poate formula pentru un plan şi orice izometrie a planului este bijectivă, inversa ei fiind izometrie.

Amintim acum că fiind date trei puncte distincte A, B, C în spaţiu se spune că punctul B este între A şi C dacă şi numai dacă

$$d(A, B) + d(B, C) = d(A, C).$$

Se mai spune că B este interior segmentului (AC).

TEOREMA 2.3 *Fie $f : S \to S$ o izometrie a spaţiului. Dacă punctul B este între A şi C, atunci $f(B)$ este între punctele $f(A)$ şi $f(C)$ şi reciproc.*

Ipotezele conduc imediat la relaţia

$$d(f(A), f(B)) + d(f(B), f(C)) = d(f(A), f(C)).$$

Folosind această teoremă, se demonstrează că orice izometrie a spaţiului transformă:

- orice segment (AB) în segmentul $(f(A)f(B))$, astfel încât se păstrează ordinea punctelor;
- orice semidreaptă $(AB$ în semidreapta $(f(A)f(B))$ astfel încât se păstrează ordinea punctelor;
- orice dreaptă AB în dreapta $f(A)f(B)$ astfel încî se păstrează ordinea punctelor;
- orice plan π în planul $f(\pi)$;
- orice semiplan închis (deschis) de frontieră AB într-un semiplan închis (deschis) de frontieră $f(A)f(B)$;
- orice unghi $\widehat{AOB}$ în unghiul $f(A)\widehat{f(O)}f(B)$ congruent cu $\widehat{AOB}$;
- orice semispaţiu închis (deschis) de frontieră π în semispaţiul închis (deschis) de frontieră $f(\pi)$;
- orice unghi diedru $\widehat{\alpha d\beta}$ în unghiul diedru $f(\alpha)\widehat{f(d)f(\beta)}$ congruent cu $\widehat{\alpha d\beta}$, unde α, β sunt plane şi $\alpha \cup \beta$;
- orice cerc $C(O, r)$ (orice disc $D(O, r)$) în cercul $C(f(O), r)$ (în discul $D(f(O), r)$);
- orice sferă $S(O, r)$ în sfera $S(f(O), r)$.

Demonstrarea acestor rezultate este o ocazie excelentă de a reactualiza şi aprofunda noţiuni geometrice mai rar utilizate la nivel logic (semidreaptă, semiplan, semispaţiu etc.).

Din proprietăţile de mai sus rezultă că orice izometrie a spaţiului păstrează (invariază):

- paralelismul şi perpendicularitatea planelor şi dreptelor;
- paralelismul şi perpendicularitatea dintre drepte şi plane.

TEOREMA 2.4 *Mulţimea izometriilor spaţiului S formează un grup în raport cu operaţia de compunere.*

Apare aici ocazia de a repeta noţiunea de grup, de compunere a aplicaţiilor cu proprietatea ei de asociativitate.

Ne limităm acum la izometrii plane.

TEOREMA 2.5 *Fie două triunghiuri ABC şi $A'B'C'$ în planul π, astfel că*

$$(AB) \equiv (A'B'), \quad (BC) \equiv (B'C'), \quad (CA) \equiv (C'A').$$

Atunci există o unică izometrie $f : \pi \to \pi$ astfel ca $f(A) = A', f(B) = B', f(C) = C'$.

Ideea de demonstraţie este de a defini f pentru A, B şi C ca mai sus, de a o extinde mai întâi la dreptele AB şi AC, apoi la întreg planul. Unicitatea se demonstrează prin reducere la absurd.

Această teoremă combinată cu observaţia că orice izometrie transformă un triunghi într-un triunghi congruent cu el ne conduce la concluzia: *două triunghiuri dintr-un plan dat sunt congruente dacă şi numai dacă există o izometrie a planului care transformă un triunghi în celălalt.*

Din consideraţiile de mai sus rezultă că, interpretată ca o aplicaţie între vârfurile a două triunghiuri indicată prin $(')$, congruenţa este restricţia unei izometrii a planului. Avem aici o motivare a termenului de congruenţă folosit uneori pentru izometrie. Este acum natural să extindem termenul de congruenţă la figuri oarecare spunând că figura F este congruentă cu figura F' dacă există o izometrie f (a planului dacă figurile sunt plane), astfel că $f(F) = F'$.

Această definiţie poate fi utilă în considerarea funcţiei arie pentru figuri plane mai complicate decât suprafeţele poligonale.

2.5 Asemănarea în plan. Proprietăţi generale

Elevii obţin o idee despre figurile asemenea cu ocazia studiului temei *Asemănarea triunghiurilor*. Dintre multele variante de tratare a ei este de preferat una care pregăteşte terenul pentru predarea asemănării ca transformare geometrică a planului (spaţiului). Considerăm că această temă se poate studia imediat după studiul proprietăţilor generale ale izometriilor în maniera descrisă de noi mai sus.

Transformarea de asemănare poate fi introdusă prin generalizarea izometriei. Izometria este transformarea geometrică ce păstrează distanţa.

Putem considera, teoretic vorbind, transformări geometrice care multiplică distanţa cu un factor.Cum distanţele se exprimă prin numere reale pozitive, factorul de multiplicare trebuie să fie în mod necesar un numâr real strict pozitiv.

DEFINIŢIA 2.9 *O aplicaţie* $a_k : \pi \to \pi$ *a planului se numeşte* **asemănare de raport** k*, unde* k *este un număr real strict pozitiv dacă este surjectivă şi pentru oricare două puncte* A *şi* B *din* π *avem*

$$d(a_k(A), a_k(B)) = k \cdot d(A, B). \tag{2.6}$$

Numărul k trebuie luat strict pozitiv pentru că dacă ar fi zero, din (2.6) ar rezulta $a_0(A) = a_0(B)$ pentru oricare două puncte A, B.

Deci aplicaţia a_0 este o aplicaţie constantă, care nu este surjectivă.

Mulţimea asemănărilor planului nu este vidă, deoarece conţine izometriile planului, obţinute pentru $k = 1$.

Din relaţia (2.6) rezultă că orice asemănare a planului este injectivă, iar fiind prin definiţie surjectivă, este bijectivă. Se demonstrează uşor că inversa unei asemănări de raport k este o asemănare de raport $\frac{1}{k}$.

Menţionăm că (2.6) asigură şi surjectivitatea aplicaţiei a_k. Considerând aplicaţia identică asemănare particulară, se constată că mulţimea asemănărilor planului formează un grup în raport cu compunerea aplicaţiilor.

Asocierea $a_k \to k$ este un izomorfism al acestui grup cu grupul multiplicativ al numerelor reale strict pozitive.

Asemănările au multe proprietăţi similare cu cele ale izometriilor.

TEOREMA 2.6 *Fie* a_k *o asemănare de raport* k*, atunci punctul* B *se află între* A *şi* C*, dacă şi numai dacă punctul* $a_k(B)$ *se află între* $a_k(A)$ *şi* $a_k(C)$.

Modul de transformare a figurilor din plan prin asemănare este identic cu cel descris la izometrii, cu modificarea evidentă că un cerc $C(O, r)$, respectiv un disc $D(O, r)$ este transformat prin a_k într-un cerc $C(O, kr)$, respectiv un disc $D(O, kr)$, adică raza se multiplică cu factorul k.

Orice asemănare transformă drepte paralele în drepte paralele şi că asemănările păstrează raportul lungimilor segmentelor.

Legătura cu asemănarea triunghiurilor se stabileşte prin

TEOREMA 2.7 *Dacă* ΔABC *şi* $\Delta A'B'C'$ *sunt două triunghiuri oarecare în planul* π *astfel încât*

$$d(A', B') = k \cdot d(A, B), d(B', C') = k \cdot d(B, C), d(C', A') = k \cdot d(C, A)$$

unde k este un număr real strict pozitiv, atunci există o asemănare de raport k a planului π unică a_k încât

$$a_k(A) = A', a_k(B) = B', a_k(C) = C'.$$

Din observaţia că orice triunghi este transformat printr-o asemănare într-un triunghi asemenea cu el şi teorema precedentă rezultă:

două triunghiuri sunt asemenea dacă şi numai dacă există o asemănare care să transforme unul în celălalt.

O primă consecinţă a acestui fapt este aceea că, întrucât în planul euclidian există triunghiuri asemenea necongruente, există asemănări ale planului care nu sunt izometrii.

O altă consecinţă rezidă în motivaţia următoarei definiţii:

DEFINIŢIA 2.10 *Două figuri F şi F' ale planului π se numesc asemenea cu coeficientul de asemănare k dacă există o asemănare a_k a planului π , încât $a_k(F) = F'$.*

2.6 Omotetia în plan

Asemănarea particulară cea mai importantă, lăsând la o parte izometria, este omotetia de centru dat şi raport dat.

Definiţia sintetică a omotetiei poate fi introdusă foarte devreme în forma:

DEFINIŢIA 2.11 *Fie O un punct într-un plan π şi k un număr real strict pozitiv. Omotetia de centru O şi raport k este o transformare a planului π care asociază fiecărui punct M un punct M', astfel că O, M şi M' sunt coliniare în ordinile $O - M - M'$ sau $O - M' - M$ şi $OM' = k \cdot OM$.*

Evident că ordinea $O - M - M'$ atrage $k > 1$, iar ordinea $O - M' - M$ atrage $k < 1$. Pe de altă parte, există şi posibilitatea de a lua ordinele $M - O - M'$ sau $M' - O - M$. Acest fapt ne determină să numim transformarea definită mai sus omotetie de gen 1, iar transformarea în care apar ordinile $M - O - M'$, sau $M' - O - M$, să o numim omotetie de gen 2.

Cu această definiţie, considerând pe rând ordinile posibile, se pot demonstra principalele proprietăţi ale omotetiei.

Ordinea de abordare a lor ar putea fi următoarea:

- asocierea $M' \to M$ este omotetie de centru O şi raport $\frac{1}{k}$. Ea este inversa omotetiei de centru O şi raport k;

- omotetia de raport k şi centru O multiplică distanţa între puncte prin factorul k;
- omotetia transformă o dreaptă ce trece prin O în ea însăşi, cu alte cuvinte, omotetiile de centru O invariază dreptele prin O;
- omotetia de centru O transformă o dreaptă d ce nu trece prin O într-o dreaptă d' paralelă cu d;
- omotetia de centru O şi raport k transformă un cerc $C(P_0, r)$ într-un cerc $C(P_0^1, kr)$ unde P_0^1 este omoteticul lui P_0.

TEOREMA 2.8 *Orice asemănare este produsul dintre o omotetie şi o izometrie.*

Demonstraţie. Dacă a_k este o asemănare de raport k şi $h_O^{\frac{1}{k}}$ este o omotetie de raport $\frac{1}{k}$ şi centrul O un punct oarecare, atunci $f = a_k \circ h_O^{\frac{1}{k}}$ este o asemănare de raport $k \cdot \frac{1}{k} = 1$, deci este o izometrie. Relaţia de mai sus conduce la $a_k = f \circ h_O^k$. **q.e.d.**

Pe de altă parte, omotetia este foarte utilă în rezolvarea problemelor de geometrie, fapt bine cunoscut şi care se poate constata din numeroase culegeri de probleme de geometrie. Din acest motiv, considerăm că omotetia trebuie studiată înaintea asemănării şi chiar înaintea tratării izometriei în general.

Cu aceste puţine cunoştinţe privind omotetia putem să rezolvăm multe probleme interesante de geometrie. De exemplu, putem obţine majoritatea rezultatelor privind configuraţia *Cercul lui Euler* prin considerarea omotetiei inverse de centru G (centrul de greutate al triunghiului) şi raport $\frac{1}{2}$.

Ultimele două proprietăţi ale omotetiei, menţionate mai sus, permit abordarea unei clase mari de probleme de loc geometric, dacă sunt reformulate după cum urmează:

- Locul geometric al punctului M', omoteticul punctului într-o omotetie de centru O şi raport k, este o dreaptă d', când M descrie o dreaptă d. Dacă d trece prin O, avem $d' = d$, iar în caz contrar avem $d' \parallel d$.
- Locul geometric al punctului M', omoteticul punctului M într-o omotetie de centru O şi raport k, este un cerc $C(P_0^1, kr)$, când M descrie cercul $C(P_0, r)$, unde P_0^1 este omoteticul lui P_0 .

În momentul în care elevii dispun de noţiunea de vector se poate trata omotetia cu metode vectoriale. Însăşi definiţia ei devine mai uşoară pentru că noţiunea de vector ne permite să surprindem simultan situaţiile de ordonare a punctelor întâlnite anterior.

DEFINIŢIA 2.12 *Fie O un punct în planul π şi k un număr real nenul. Omotetia de centru O şi raport k este o transformare a planului care aplică un punct M într-un punct M' dat de formula*

$$\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}.$$

În această definiţie cuprindem omotetiile de ambele genuri (cele de gen 1 corespund la k pozitiv, iar cele de gen 2 la k negativ). Demonstraţiile proprietăţilor menţionate mai sus se simplifică pentru că nu trebuie să mai distingem cele două genuri de omotetie, dar ideile sunt în esenţă aceleaşi.

În acest context vectorial putem să ne ocupăm de următoarele două proprietăţi ale omotetiilor:

- Mulţimea omotetiilor de acelaşi centru formează un grup comutativ izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.
- Produsul a două omotetii h_O^k şi $h_{O'}^{k'}$ este o omotetie având centrul coliniar cu O şi O', dacă $k \cdot k' \neq 1$ şi este o translaţie de vector $\overline{OO'}$ dacă $k \cdot k' = 1$. Ca aplicaţie se poate demonstra teorema lui Menelaus.

Omotetia în spaţiu se poate prezenta similar. Definiţia vectorială rămâne practic aceeaşi. Proprietăţile anterioare rămân valabile. La ele se pot adăuga următoarele:

- omotetia spaţiului invariază dreptele şi planele care trec prin centrul omotetiei;
- omotetia spaţiului transformă un plan care nu trece prin centru de omotetie într-un plan paralel cu el;
- omotetia spaţiului de centru O şi raport k transformă o sferă $S(P_0, r)$ într-o sferă $S(P_0^1, kr)$ unde P_0^1 este omoteticul lui P_0 .

Aplicaţiile omotetiei în spaţiu sunt analoage cu cele ale omotetiei plane.

Revenim la plan.

Fie un punct fix O şi o omotetie h_O^k. Introducem în plan un reper cartezian oarecare faţă de care avem $O(x_0, y_0), M(x, y)$ şi omoteticul său $M'(x', y')$. Condiţia $\overline{OM'} = k \cdot \overline{OM}$ este echivalentă cu

$$\begin{cases} x' = x_0 + k(x - x_0) \\ y' = y_0 + k(y - y_0). \end{cases} \tag{2.7}$$

Aceste ecuaţii se numesc ecuaţiile omotetiei h_O^k în raport cu reperul cartezian ales. Ele pot fi luate ca definiţie a omotetiei în plan şi utilizate pentru a demonstra proprietăţile esenţiale ale omotetiilor. Pentru a facilita asemenea demonstraţii putem alege reperul cu originea în O, deci $x_0 = 0$ şi $y_0 = 0$.

De exemplu, dacă M parcurge dreapta de ecuaţie $ax + by + c = 0$, atunci coordonatele lui M' satisfac ecuaţia $ax + by + ck = 0$, deci M' parcurge o dreaptă paralelă cu cea dată.

Similar, dacă M se află pe cercul de ecuaţie $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, coordonatele lui M' verifică ecuaţia $(x - ka)^2 + (y - kb)^2 = (kr)^2$. Deci, M' se află pe cercul de rază kr şi de centru omotetic cu centrul cercului dat.

Analog se pot demonstra alte proprietăţi ale omotetiei.

2.6.1 Folosirea omotetiei la rezolvarea unor probleme de loc geometric

În aplicaţii intervine în mod frecvent următoarea problemă de loc geometric.

Problemă

Se dau cercul $C(O, R)$, unde O este un punct fix şi puntul I de asemenea fixat, iar P un punct variabil pe cerc. Se cere să se determine locul geometric al punctului $M \in IP$, dacă raportul $\frac{MI}{IP} = k$ este cunoscut, k fiind un număr pozitiv fixat.

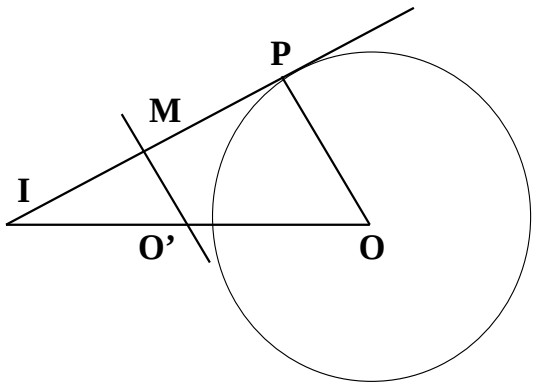

Figura 2.8:

Construim paralela $MO' \parallel PO, O' \in IO$. Atunci

$$\frac{O'I}{IO} = \frac{MI}{IP} = k, \quad \frac{MO'}{PO} = \frac{MI}{IP} = k,$$

şi cum segmentele IO, PO au lungimea constantă, rezultă că punctul O' este fix, iar segmentul MO' are lungimea constantă.

Locul geometric este cercul cu centrul O' şi rază MO'(omoteticul cercului dat sau transformatul acestuia prin omotetia de centru I şi raport k).

Ca exemplu în acest sens poate servi *Cercul lui Euler*, cercul care trece prin mijloacele unui triunghi ABC, prin picioarele înălţimilor sale şi prin mijloacele segmentelor AH, BH, CH, H fiind ortocentrul triunghiului. (Cercul celor 9 puncte)

2.7 Inversiunea în plan

O altă transformare geometrică foarte utilă în rezolvarea problemelor de geometrie este inversiunea. Înainte de introducerea definiţiei inversiunii în plan bine să se reamintească puterea unui punct faţă de un cerc, pornind de la următoarele rezultate:

Fie $C(O,r)$ un cerc în planul π, cu centrul în punctul fixat O şi rază r.

- Oricare ar fi punctele $A, B, A', B' \in C(O,r)$ cu proprietatea că dreptele AB şi $A'B'$ se intersectează într-un punct P are loc egalitatea:

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'.$$

  Se demonstrează uşor din proporţionalitatea laturilor triunghiurilor asemenea $\Delta PAB'$ şi $\Delta PA'B$.

- Dacă o secantă variabilă trece printr-un punct fix P şi intersectează un cerc $C(O,r)$ în punctele A şi B, atunci produsul

$$PA \cdot PB = ct$$

  este constant.

DEFINIŢIA 2.13 *Se numeşte putere a punctului P faţă de cercul $C(O,r)$, numărul notat*

$$\rho(P) = PA \cdot PB$$

unde A şi B sunt punctele de intersecţie ale unei secante duse prin P cu cercul $C(O,r)$.

- se defineşte astfel o funcţie $\rho : \pi \to R$, definită prin

$$\rho(P) = PA \cdot PB$$

  unde A şi B sunt punctele de intersecţie ale unei secante duse prin P cu cercul $C(O,r)$.

- puterea unui punct faţă de un cerc ne indică poziţia punctului faţă de cerc:

  1. $P \in \text{Ext}(C(O,r))$ dacă şi numai dacă $\rho(P) > 0$;
  2. $P \in C(O,r)$ dacă şi numai dacă $\rho(P) = 0$;
  3. $P \in \text{Int}(C(O,r))$ dacă şi numai dacă $\rho(P) < 0$.

- puterea unui punct P faţă de un cerc este

$$\rho(P) = (OP)^2 - r^2.$$

Putem prezenta aceste rezultate şi vectorial dacă elevii cunosc elementele de calcul vectorial. De asemenea definiţia inversiunii poate fi dată mai uşor.

Fie $O \in \pi$ un punct fix şi k un număr real nenul.

DEFINIŢIA 2.14 *Inversiunea de pol O şi raport k este o transformare a planului prin care fiecărui punct $X \in \pi - \{O\}$ i se asociază punctul X' pe dreapta OX astfel încât*

$$\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = k$$

iar punctului O i se asociază punctul O.

Inversiunea de pol O şi raport k se notează i_O^k.Punctul O se numeşte polul inversiunii.

Aşadar

$$i_O^k : \pi \to \pi$$

$$i_O^k(X) \in OX, \quad \overline{OX} \cdot \overline{Oi_O^k(X)} = k, \quad \forall X \in \pi.$$

Punctul $X' = i_O^k(X)$ se numeşte transformatul punctului X prin inversiunea de pol O şi raport k sau inversul punctului X prin această inversiune şi vice-versa X este inversul punctului X' prin i_O^k.

Punctele X şi $i_O^k(X)$ se numesc puncte omoloage ale inversiunii i_O^k.

Astfel se pune în evidenţă că:

- inversiunea este o transformare involutivă

$$i_O^k \circ i_O^k = 1_\pi$$

- inversiunea este inversabilă şi $(i_O^k)^{-1} = i_O^k$
- punctul O este invariant în raport cu inversiunea i_O^k şi toate dreptele care trec prin O sunt drepte invariante în raport cu inversiunea i_O^k.

DEFINIŢIA 2.15 *Dacă $k > 0$ inversiunea i_O^k se numeşte pozitivă, iar dacă $k < 0$ inversiunea i_O^k se numeşte negativă.*

Vom prezenta în continuare câteva propoziţii care ne dau imaginile unui cerc şi unei drepte din plan printr-o inversiune.

TEOREMA 2.9 *Dacă i_O^k este o inversiune pozitivă, atunci i_O^k invariază punct cu punct cercul $C(O, \sqrt{k})$ şi transformă interiorul cercului $C(O, \sqrt{k})$ în exteriorul lui şi exteriorul cercului $C(O, \sqrt{k})$ în interiorul lui.*

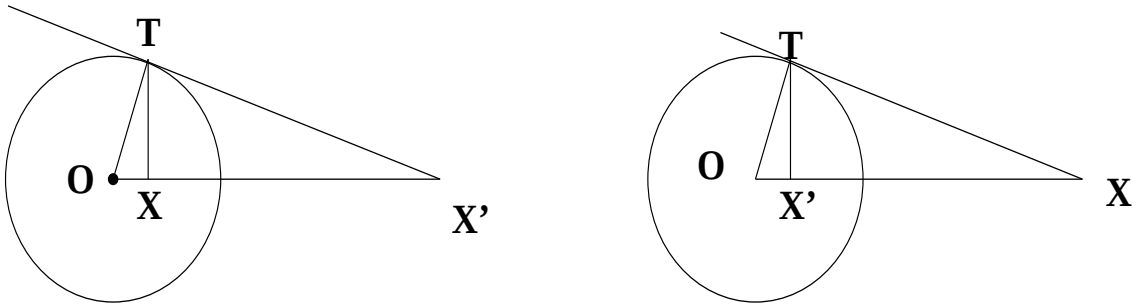

Figura 2.9:

Demonstraţie.

Într-adevăr pentru orice $X \in C(O, \sqrt{k})$ are loc $\overline{OX} \cdot \overline{OX} = (\sqrt{k})^2 = k$ şi deci $i_O^k(X) = X$ pentru orice $X \in C(O, \sqrt{k})$. Adică $i_O^k(C(O, \sqrt{k})) = C(O, \sqrt{k})$. Fie acum $X \in$Int$(C(O, \sqrt{k}))$. Construim perpendiculara pe dreapta OX prin punctul X şi fie T unul din punctele de intersecţie al acestei perpendiculare cu cercul $C(O, \sqrt{k})$. Tangenta în punctul T la cercul $C(O, \sqrt{k})$ intersectează dreapta OX în punctul X'.

Din teorema catetei aplicată în triunghiul OTX'(figura) rezultă $\overline{OX} \cdot \overline{OX'} = (\sqrt{k})^2 = k$ şi deci $i_O^k(X) = X'$.

Dacă $X \in$Ext$(C(O, \sqrt{k}))$ construim tangenta XT la cercul $C(O, \sqrt{k})$. $T \in C(O, \sqrt{k})$ (figura) şi X' piciorul perpendicularei din T pe dreapta OX. Teorema catetei în OTX ne dă $\overline{OX'} \cdot \overline{OX} = (\sqrt{k})^2 = k$ şi deci $i_O^k(X') = X$. **q.e.d.**

Din această teoremă rezultă o metodă practică de construcţie a imaginii $i_O^k(X)$ unui punct X prin inversiunea $i_O^k, k > 0$.

DEFINIŢIA 2.16 *Pentru i_O^k o inversiune pozitivă, cercul $C(O, \sqrt{k})$ se numeşte cercul inversiunii i_O^k sau cercul de inversiune.*

DEFINIŢIA 2.17 *Două cercuri secante se numesc ortogonale dacă tangenta într-un punct comun la unul dintre cercuri trece prin centrul celuilalt.*

TEOREMA 2.10 *Un cerc diferit de cercul de inversiune este invariant în raport cu inversiunea dacă şi numai dacă este ortogonal cu cercul de inversiune.*

PROPOZIŢIA 2.2 *Orice două perechi de puncte omoloage într-o inversiune sunt aşezate pe un cerc, dacă nici unul dintre puncte nu este polul inversiunii.*

Se pot demonstra următoarele rezultate:

- printr-o inversiune orice cerc care nu conţine polul inversiunii se transformă într-un cerc care de asemenea nu conţine polul inversiunii;

- printr-o inversiune i_O^k orice patru puncte situate pe un cerc care conţine polul O al inversiunii se transformă în patru puncte situate pe o dreaptă care nu conţine polul inversiunii.
- printr-o inversiune orice dreaptă care nu conţine polul inversiunii se transformă într-un cerc care conţine polul inversiunii.
- daca cercul $C(O_2, r_2)$ este imaginea cercului $C(O_1, r_1)$ prin inversiunea i_O^k, atunci $\frac{r_2}{r_1} = \frac{k}{\rho(O)}$, unde $\rho(O)$ este puterea polului O în raport cu cercul $C(O_2, r_2)$.

DEFINIŢIA 2.18 *Unghiul a două cercuri care se intersectează în punctele A şi B este unghiul format de cele două tangente la cercuri în A sau B.*

DEFINIŢIA 2.19 *Unghiul dintre o dreaptă şi un cerc pe care-l intersectează în A şi B este unghiul format de dreaptă şi una dintre tangentele la cerc în A sau B.*

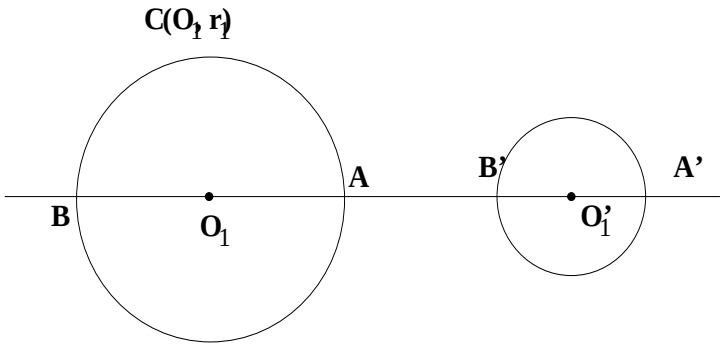

Figura 2.10: Inversul unui cerc care nu trece prin polul inversiunii O

Într-o inversiune sunt invariante:

- unghiul a două cercuri secante;
- unghiul dintre o dreaptă şi un cerc pe care-l intersectează;
- unghiul a două drepte secante.

TEOREMA 2.11 *Mulţimea tuturor omotetiilor şi a inversiunilor planului, care au acelaşi centru formează un grup.*

DEFINIŢIA 2.20 *Grupul format din omotetiile şi inversiunile planului cu acelaşi centru şi pol O se numeşte grupul conform de centru O al planului.*

Construcţia cu rigla şi compasul a imaginii unui cerc printr-o inversiune i_O^k se face astfel:

- cercul $C(O_1, r_1)$ nu trece prin polul inversiunii i_O^k. În acest caz fie A şi B punctele de intersecţie ale dreptei OO_1 cu cercul $C(O_1, r_1)$ (figura 2.10). Construim punctele $A' = i_O^k(A)$ şi $B' = i_O^k(B)$. Inversul cercului $C(O_1, r_1)$ prin inversiunea i_O^k este cercul de diametru $[A'B']$.

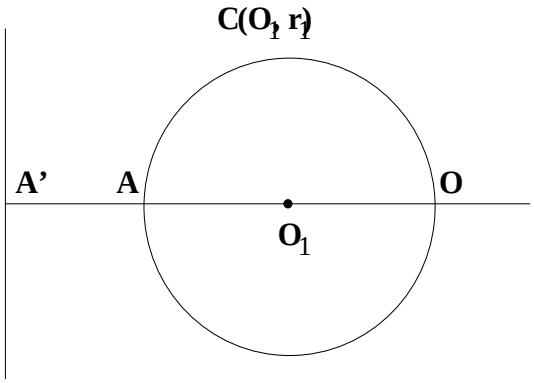

Figura 2.11:

- cercul $C(O_1, r_1)$ trece prin polul inversiunii i_O^k.În acest caz imaginea cercului $C(O_1, r_1)$ prin inversiunea i_O^k. este o dreaptă. Fie A al doilea punct de intersecţie al dreptei OO_1 cu cercul $C(O_1, r_1)$ (figura 2.10).Construim imaginea punctului A prin inversiunea i_O^k şi vom obţine $A' = i_O^k(A) \in OO_1$. Perpendiculara pe OO_1 în A' este imaginea cercului $C(O_1, r_1)$ prin inversiunea i_O^k.

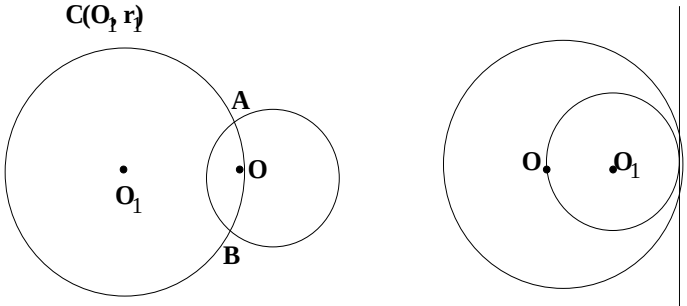

Figura 2.12 a).

Figura 2.12 b)

Figura 2.12:

Dacă cercul $C(O_1, r_1)$ intersectează cercul de inversiune în punctele A şi B, atunci $AB = i_O^k(C(O_1, r_1))$ (figura 2.11), iar dacă cercul $C(O_1, r_1)$ este tangent la cercul de inversiune, atunci $i_O^k(C(O_1, r_1))$ este tangenta la cercul de inversiune în punctul de tangenţă al celor două cercuri. (figura 2.12)

Capitolul 3

Geometrie în spaţiu

3.1 Introducere în geometria tetraedrului

Se poate defini tetraedrul ca un caz particular al piramidei:

DEFINIŢIA 3.1 *Fie $S = [A_1A_2 \dots A_n]$ o suprafaţă poligonală cu frontiera un poligon aparţinând unui plan π şi $V \notin \pi$. Se numeşte piramidă cu vârful V şi bază S mulţimea tuturor segmentelor $[VA]$, cu $A \in S$.*

Suprafaţă poligonală S se numeşte baza piramidei.

- În funcţie de natura poligonului S se pot întâlni mai multe tipuri de piramide.
- Se pune în evidenţă faptul că o piramidă triunghiulară se numeşte tetraedru.
  Deci, tetraedrul este o piramidă particulară, cu poligonul S un triunghi.

Dar putem defini direct tetraedrul:

DEFINIŢIA 3.2 *Fie punctele A, B, C, D patru puncte necoplanare din spaţiu. Mulţimea $ABCD = [ABC] \cup [ABD] \cup [ACD] \cup [BCD]$ se numeşte tetraedru.*

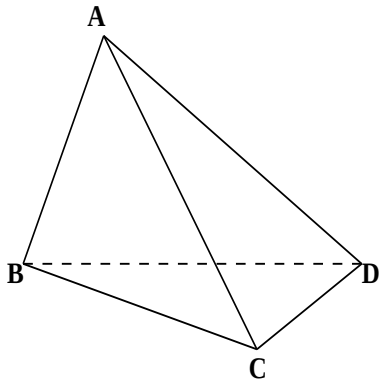

Figura 3.1: Tetraedrul ABCD

- Punctele A, B, C, D se numesc vârfurile tetraedrului $ABCD$;
- Segmentele închise $[AB], [AC], [AD], [BD], [BC], [CD]$ definesc muchiile tetraedrului;
- Suprafeţele triunghiulare $[ABC], [ABD], [ACD], [BCD]$ se numesc feţele tetraedrului;
- Folosind materialul didactic elevii vor constata că în cazul tetraedrului fiecare faţă poate fi considerată bază şi când aşezăm un tetraedru oarecare cu o altă faţă ca bază el capată de fiecare dată alt aspect.
- Analogie între triunghi şi tetraedru: tetaedrul este poliedrul cu cel mai mic număr de feţe aşa cum triunghiul este poligonul cu cel mai mic număr de laturi.

DEFINIŢIA 3.3 *Numim înălţime a unui tetraedru perpendiculara dusă dintr-un vârf al tetraedrului pe faţa opusă.*

Spre deosebire de cazul triunghiului (ale cărui înălţimi sunt întotdeauna concurente), înălţimile unui tetraedru nu sunt întotdeauna concurente!

În general cele patru înaltimi ale unui tetraedru sunt două câte două necoplanare şi sunt generatoarele unui hiperboloid (J. STEINER-1827), numit hiperboloidul înălţimilor. Acestui hiperboloid îi aparţin perpendicularele ridicate pe planele feţelor tetraedrului care trec prin ortocentrele acestor feţe.

DEFINIŢIA 3.4 *Într-un tetraedru numim bimediană segmentul care uneşte mijloacele a două muchii opuse.*

Orice tetraedru are şase muchii, deci există trei bimediane.

PROPOZIŢIA 3.1 *Într-un tetraedru oarecare cele trei bimediane sunt concurente.*

Demonstraţie. În tetraedrul $ABCD$ considerăm punctele M, N, P, Q, R, S mijloacele laturilor $[AB], [CD], [BC], [AD], [AC], [BD]$ respectiv. Vom demonstra că bimedianele $[MN], [PQ], [MN]$ sunt concurente.

În triunghiurile BAC şi DAC care au latura comună $[AC]$ sunt puse în evidenţă liniile mijlocii $[MP]$ şi $[QN]$, care corespund laturii comune.

Deci:

$$MP \parallel QN \text{ şi } MP = QN.$$

Analog: $PN \parallel MQ$ şi $PN = MQ$

$$PS \parallel QR \text{ şi } PS = QR.$$

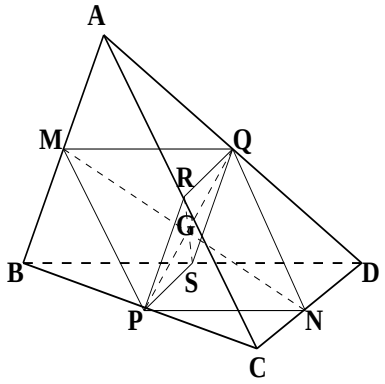

Figura 3.2: Concurenţa bimedianelor

Rezultă că patrulaterele $PRQS, MPNQ$ sunt paralelograme şi mai mult cele trei bimediane $[MN], [PQ], [RS]$ ale tetraedrului sunt diagonale în aceste paralelograme.

Cum diagonalele unui paralelogram sunt concurente şi se înjumătăţesc, cele trei bimediane $[MN], [PQ], [RS]$ ale tetraedrului $ABCD$ sunt concurente, punctul de concurenţă este notat cu G şi este mijlocul fiecărei bimediane. **q.e.d.**

DEFINIŢIA 3.5 *(LEONARDO DA VINCI)*

Punctul de concurenţă al bimedianelor, notat cu G, se numeşte **centrul de greutate, sau centrul distanţelor medii, sau baricentrul tetraedrului.**

PROPOZIŢIA 3.2 *Fie $ABCD$ un tetraedru, $M \in (AB)$ cu $\dfrac{AM}{AB} = u, 0 < u < 1$ şi $N \in (CD)$ astfel încât $\dfrac{CN}{CD} = 1 - u$. Atunci au loc următoarele inegalităţi:*

$$|u \cdot BC - (1-u) \cdot AD| < MN < u \cdot BC + (1-u) \cdot AD, \tag{3.1}$$

$$|u \cdot BD - (1-u) \cdot AC| < MN < u \cdot BD + (1-u) \cdot AC.$$

Demonstraţie.

Fie $P \in (AC)$ astfel încât $MP \parallel BC$ (fig. 3). Din teorema fundamentală a asemanarii avem $MP = u \cdot BC$ şi $\dfrac{PC}{AC} = 1 - u$.

Cum $\dfrac{CN}{CD} = 1 - u$, vom obţine $PN \parallel AD$ şi în consecinţă din triunghiurile asemenea CPN şi CAD se obţine $PN = (1-u) \cdot AD$. Deoarece punctele M, P, N nu pot fi coliniare, din inegalităţile triunghiului obţinem

$$|MP - PN| < MN < MP + PN$$

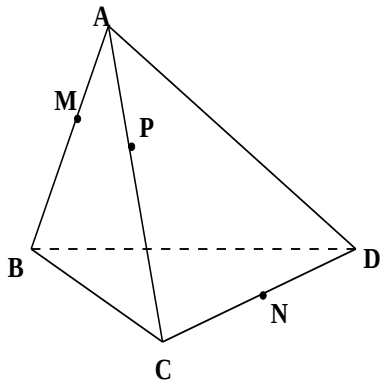

Figura 3.3:

sau după înlocuiri, avem

$$|u \cdot BC - (1-u) \cdot AD| < MN < u \cdot BC + (1-u) \cdot AD.$$

Procedând la fel obţinem şi al doilea grup de inegalităţi.

q.e.d.

COROLARUL 3.1 *(Inegalităţile bimedianei).*
Fie $ABCD$ un tetraedru, M mijlocul lui $[AB]$ şi N mijlocul lui $[CD]$; atunci

$$|BC - AD| < 2MN < BC + AD, \quad |BD - AC| < 2MN < BD + AC. \quad (3.2)$$

Demonstraţie.
Luând $u = \dfrac{1}{2}$ în (3.1) vom găsi aceste inegalităţi. **q.e.d.**

DEFINIŢIA 3.6 *Într-un tetraedru $ABCD$, dreptele care unesc punctele A, B, C, D cu centrele de greutate ale feţelor opuse se numesc* **medianele** *tetraedrului $ABCD$.*

TEOREMA 3.1 *Cele patru mediane ale unui tetraedru sunt concurente.*

Demonstraţie.
Fie G_1 punctul de intersecţie al medianelor triunghiului BCD. Se notează cu M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB], [CD], [BC], [AD]$, figura (3.3).
În planul (APD), $PQ \cap AG_1 \neq \emptyset$.
În planul paralelogramului $MPNQ$, $MN \cap PQ \neq \emptyset$.
În planul (ANB), $NM \cap AG_1 \neq \emptyset$. Deci dreptele MN, PQ, AG_1, se intersectează două câte două şi nu sunt coplanare. Rezultă că

$$MN \cap PQ \cap AG_1 \neq \emptyset,$$

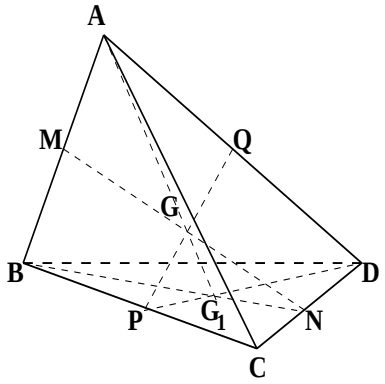

Figura 3.4: Concurenţa medianelor

deci $G \in AG_1$.

Notăm cu G_2 punctul de intersecţie al medianelor triunghiului ACD, iar G_3 pentru triunghiul ABD. Analog se demonstrează BG_2 şi CG_3 trec prin G.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 3.3 *(LEONARDO DA VINCI) Centrul de greutate al unui tetraedru împarte o mediană în două segmente, dintre care cel care conţine vârful tetraedrului este triplul celuilalt .*

Demonstraţie. Se consideră separat planul (APD), figura (3.4). Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul AG_1D, pentru dreapta Q, G, P se obţine:

$$\frac{AQ}{QD} \cdot \frac{PD}{PG_1} \cdot \frac{GG_1}{GA} = 1$$

Dar $AQ = QD$ şi $PD = 3PG_1$, de unde rezultă că $\frac{GG_1}{GA} = \frac{1}{3}$ sau $\frac{GG_1}{AG_1} = \frac{1}{4}$.

q.e.d.

- Un plan arbitrar, care trece printr-o mediană, împarte tetraedrul în două poliedre cu volume egale (J. L. LAGRANGE, 1810-1811).

PROPOZIŢIA 3.4 *Planele perpendiculare pe muchiile unui tetraedru duse prin mijloacele lor se intersectează într-un punct.*

Demonstraţie.

Vom demonstra că există un punct egal depărtat de toate vârfurile tetraedrului.

Ştim că toate punctele egal depărtate de B, C şi D se află pe o dreaptă d perpendiculară pe planul BCD care trece prin centrul cercului circumscris triunghiului BCD.

Punctele egal depărtate de de A şi B se află în planul mediator P al segmentului AB.

Planul P şi dreapta d se intersectează într-un punct O, căci altfel ar fi paralele şi segmentul AB ar fi în planul BCD, contrar ipotezei. **q.e.d.**

COROLARUL 3.2 *Perpendicularele ridicate pe feţele unui tetraedru în centrele cercurilor circumscrise acelor feţe sunt concurente într-un punct, O.*

Demonstraţie.

Aceste perpendiculare sunt determinate de intersecţiile perechilor de plane perpendiculare pe muchiile unui tetraedru duse prin mijloacele lor şi conform propoziţiei anterioare sunt concurente. **q.e.d.**

Astfel am demonstrat că punctul O din propoziţia de mai sus este egal depărtat de vârfurile tetraedrului şi el este centrul unei sfere care conţine vârfurile tetraedrului, care se numeşte **sfera circumscrisă tetraedrului.**

Deci:

Orice tetraedru poate fi înscris într-o sferă, care are centrul în punctul de intersecţie al planelor mediatoare ale muchiilor tetraedrului şi care este în acelaşi timp şi punctul de intersecţie al perpendicularelor ridicate pe feţele tetraedrului în centrele cercurilor circumscrise acestora.

DEFINIŢIA 3.7 *Numim* **coordonate baricentrice** *ale punctului P, patru numere $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ care sunt proporţionale cu volumele tetraedrelor cu vârful în P şi având drept baze feţele tetraedrului.*

Deci, dacă μ este factorul de proporţionalitate, atunci avem:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = \mu V,$$

V fiind volumul tetraedrului.

Pentru $\mu = 1$ coordonatele baricentrice se numesc *absolute.*

- Segmentele de dreaptă care unesc centrul de greutate al tetraedrului, G, cu vârfurile tetraedrului împart tetraedul în patru tetraedre echivalente: din această cauză coordonatele baricentrice ale lui G sunt egale.

- Distanţele lui G la feţele tetraedrului sunt invers proporţionale cu ariile acestor feţe.

PROPOZIŢIA 3.5 *(lungimea medianei)*

Fie tetraedrul $A_1A_2A_3A_4$, AG_1 o mediană a tetraedrului, unde G_1 este centrul de greutate al feţei $A_2A_3A_4$. Atunci

$$A_1G_1^2 = \frac{A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + A_1A_4^2}{3} - \frac{A_2A_3^2 + A_2A_4^2 + A_3A_4^4}{9}.$$

Demonstraţie.

Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru cu G_1 centrul de greutate al feţei $A_2A_3A_4$, iar M mijlocul laturii A_3A_4. Vom aplica relaţia lui Stewart în triunghiul A_1A_2M:

$$A_2M(A_1G_1^2 + A_2G_1 \cdot G_1M) = A_1M^2 \cdot A_2G_1 + A_1A_2^2 \cdot G_1M,$$

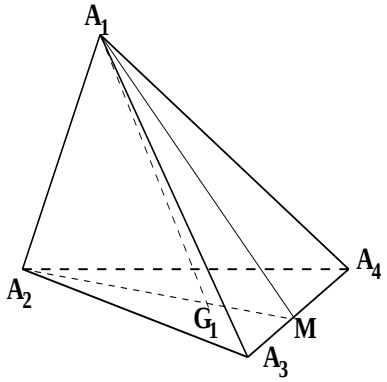

Figura 3.5: lungimea medianelor

în care vom folosi expresiile date de teorema medianei aplicată în triunghiul $A_1A_3A_4$ pentru mediana A_1M şi în triunghiul $A_2A_3A_4$ pentru mediana A_2M. Se obţine astfel lungimea medianei tetraedrului. **q.e.d.**

Observaţia 3.1 *Propoziţia (3.5) este analoagă teoremei medianei unui triunghi.*

PROPOZIŢIA 3.6 *(lungimea bimedianei) Fie tetraedrul oarecare $ABCD$, M mijlocul muchiei AB şi M' mijlocul muchiei opuse CD. Atunci:*

$$MM'^2 = \frac{BC^2 + BD^2 + AC^2 + AD^2 - AB^2 - CD^2}{4}. \tag{3.3}$$

Demonstraţie.

Aplicăm teorema medianei pentru MM', mediană a triunghiului ABM'.

BM' este mediană în triunghiul BCD şi AM' este mediană în triunghiul ACD, unde pentru calculul lor vom folosi tot teorema medianei. **q.e.d.**

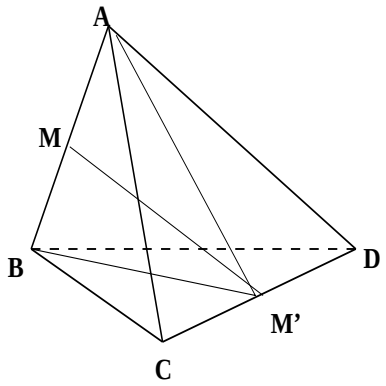

Figura 3.6: lungimea bimedianelor

Folosind lungimea bimedianelor unui tetraedru se poate demonstra imediat:

PROPOZIŢIA 3.7 *Fie tetraedrul oarecare* $ABCD$, M, N, P, Q, R, S *mijloacele muchiilor* $[AB], [CD], [BC], [AD], [AC], [BD]$ *respectiv. Atunci:*

$$MN^2 + PQ^2 + RS^2 = \frac{AB^2 + BC^2 + AD^2 + AC^2 + BD^2 + CD^2}{4}.$$

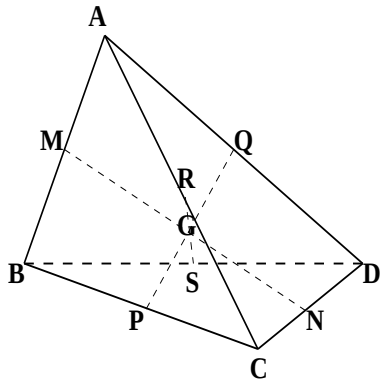

Figura 3.7:

PROPOZIŢIA 3.8 *Suma pătratelor medianelor este egala cu* $\frac{4}{9}$ *din suma pătratelor muchiilor.*

Demonstraţie. Se folosesc lugimile medinelor unui tetraedru, conform propoziţia anterioare şi se obţine relaţia anunţată. **q.e.d.**

PROPOZIŢIA 3.9 *Suma pătratelor distanţelor centrului de greutate la vârfuri este egală cu suma pătratelor lungimilor bimedianelor.*

PROPOZIŢIA 3.10 *Fie BCD un triunghi şi M un punct oarecare în spaţiu, iar G_1 centrul de greutate al triunghiului BCD. Atunci are loc relaţia lui Leibniz:*

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3MG_1^2 + G_1B^2 + G_1C^2 + G_1D^2. \tag{3.4}$$

Demonstraţie. Fie S, T, R respectiv mijloacele laturilor CD, BD, BC ale triunghiului DBC. Apliăm teorema lui Stewart în triunghiul MBS, se obţine:

$$MB^2\frac{BS}{3} + MS^2\frac{2BS}{3} = MG_1^2 \cdot BS + \frac{BS}{3}\frac{2BS}{3}BS,$$

care se poate scrie:

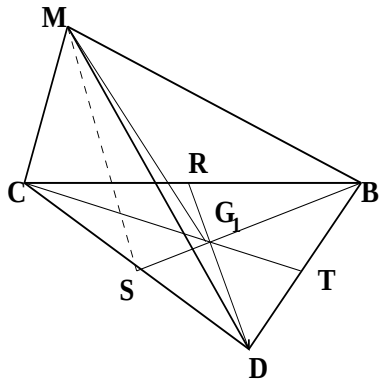

Figura 3.8:

$$MB^2 + 2MS^2 = 6SG_1^2 + 3MG_1^2. \tag{3.5}$$

În triunghiul MDS lungimea medianei MS este

$$4MS^2 = 2(MC^2 + MD^2) - DC^2. \tag{3.6}$$

Din (3.5) şi (3.6) se obţine:

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3MG_1^2 + 6G_1S^2 + \frac{1}{2}DC^2. \tag{3.7}$$

În triunghiul G_1DC, G_1S este mediană, deci:

$$4G_1S^2 = 2(G_1D^2 + G_2C^2) - DC^2. \tag{3.8}$$

Din (3.7) şi (3.8) se obţine:

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 = 3MG_1^2 + 4G_1S^2 + G_1D^2 + G_1C^2.$$

Dar $2G_1S = G_1B$ şi se obţine relaţia din enunţ. **q.e.d.**

PROPOZIŢIA 3.11 *(J. L. LAGRANGE)*

Fie $ABCD$ un tetraedru şi G centrul său de greutate, iar M un punct oarecare din spaţiu. Atunci are loc relaţia:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

Demonstraţie. Notăm cu G_1 centrul de greutate al feţei BCD. Aplicăm relaţia lui Stewart în triunghiul MAG_1:

$$MA^2 + 3MG_1^2 = 4MG^2 + 12GG_1^2. \tag{3.9}$$

Prin aplicarea propoziţiei 3.10 se obţine:

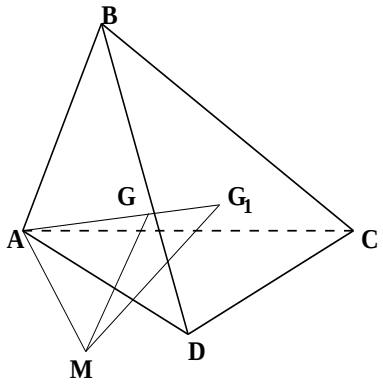

Figura 3.9:

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG_1^2 + G_1B^2 + G_1C^2 + G_1D^2. \tag{3.10}$$

Din relaţiile (3.9) şi (3.10) se obţine:

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2 = 4MG^2+12G_1A^2+G_1B^2+G_1C^2+G_1D^2. \tag{3.11}$$

În propoziţia 3.10, cu $M = G$, se obţine:

$$GB^2 + GC^2 + GD^2 = 3GG_1^2 + G_1B^2 + G_1C^2 + G_1D^2.$$

Ţinând seama că $3G_1G = GA$, relaţia (3.11) devine:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2.$$

q.e.d.

Observaţia 3.2 *Folosind această proprietate se obţine că suma pătratelor distanţelor lui G la cele patru vârfuri este minimă.*

Observaţia 3.3 *Relaţia din propoziţia 3.11 este generalizarea relaţiei*

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

valabilă pentru un triunghi ABC, G centrul de greutate al triunghiului, M un punct oarecare din planul triunghiului.

Au fost demonstrate următoarele afirmaţii:

- Locul geometric al punctelor P a căror sumă a pătratelor distanţelor la vârfurile tetraedrului este constantă, este o sferă cu centrul în centrul de greutate al tetraedrului G. (J. L. LAGRANGE).
- Centrul de greutate G al tetraedrului nu trebuie confundat cu centrul de greutate al suprafeţei tetraedrului, în schimb acesta este centrul sferei înscrise în tetraedrul care are drept vârfuri centrele de greutate ale feţelor tetraedrului dat. (C. C. GERONO; 1826-1827).

PROPOZIŢIA 3.12 *Planele care trec prin mijloacele muchiilor şi sunt perpendiculare pe muchia opusă, sunt concurente într-un punct M (G. MONGE-1813), numit* **punctul lui MONGE sau anticentrul** *tetraedrului.*

Demonstraţie. Fie L şi L' mijloacelor laturilor AB şi CD în tetraedrul $ABCD$.

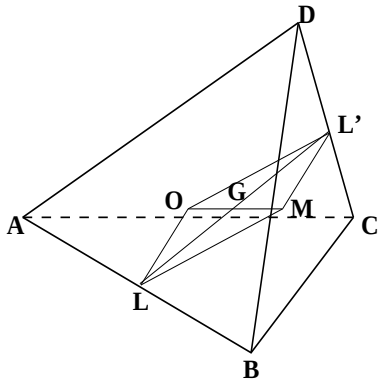

Figura 3.10:

Bimediana LL' trece prin centrul de greutate al tetraedrului G şi $GL = GL'$. Planul care trece prin L şi este perpendicular pe muchia AB trece prin centrul sferei circumscrise tetraedrului, punctul O. Deci planul care trece prin L' şi este de asemenea perpendicular pe AB conţine punctul M al dreptei OG caracterizat prin $OG = GM$.

În baza acestui raţionament, punctul M se află şi în celelalte plane care trec prin mijlocul uneia dintre laturile tetraedrului şi sunt perpendiculare pe muchia opusă. **q.e.d.**

Anticentrul unui tetraedru este un punct simetric cu centrul sferei circumscrise tetraedrului, în raport cu centrul de greutate al acestuia.Punctul lui Monge (anticentrul) al tetraedrului este centrul hiperboloidului înălţimilor.

- Centrul sferei circumscrise aparţine dreptei care uneşte centrul de greutate G cu punctul lui MONGE M, şi el este simetricul punctului M faţă de G. (G. MONGE-1813).

PROPOZIŢIA 3.13 *Planele bisectoare ale diedrelor unui tetraedru sunt concurente.*

Punctul de intersecţie al acestor plane bisectoare, notat cu I este egal depărtat de feţele tetraedrului. Există o sferă de centru I tangentă celor patru feţe ale tetraedrului, având punctele de contact cu feţele proiecţiile lui I pe aceste plane. Sfera cu centrul în I este sfera cu centrul în I, raza ei o vom nota cu r.

TEOREMA 3.2 *(P. FERMAT) Cele patru bisectoare ale triedrelor unui tetraedru sunt concurente.*

Dacă se consideră feţele tetraedrului $ABCD$ prelungite atunci planele bisectoare ale diedrelor suplimentare cu muchiile AB, AC, BC întâlnesc bisectoarea Δ_D într-un punct I_d egal depărtat de feţele tetraedrului, dar exterior lui. I_d este centrul sferei $\mathcal{S}_d$ exînscrise tetraedrului $ABCD$ corespunzătoare triedrului D. În mod analog se obţin sferele exînscrise $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c$ corespunzătoare triedrelor cu vârfurile A, B, C ale căror centre se notează cu I_a, I_b, I_c şi au razele r_a, r_b, r_c.

Au loc următoarele relaţii:

$$\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_d}=\frac{2}{r};$$

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r_d \geq 16r^4.$$

PROPOZIŢIA 3.14 *Planele care trec printr-o muchie a tetraedrului (T) şi care sunt paralele cu muchia opusă, determină un paralelipiped circumscris tetraedrului: patru dintre vârfurile acestui paralelipiped sunt vârfuri ale tetraedrului; celelalte patru vârfuri determină un alt tetraedru care are acelaşi centru de greutate G cu (T), care este simetricul lui (T) faţă de G, şi sfera circumscrisă acestui al doilea tetraedru are drept centru punctul lui MONGE al primului tetraedru (A. JACOBI).*

DEFINIŢIA 3.8 *Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetaedru. Un punct T cu proprietatea*

$$\widehat{A_iTA_j} = \widehat{A_kTA_l}, \quad \forall i,j,k,l \in \{1,2,3,4\}$$

se numeşte **centrul izogon sau punctul lui Torricelli al tetraedrului.**

Observaţia 3.4 *Punctul lui Torricelli al tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ este caracterizat de următoarea proprietate vectorială:*

$$\frac{\overline{TA_1}}{TA_1}+\frac{\overline{TA_2}}{TA_2}+\frac{\overline{TA_3}}{TA_3}+\frac{\overline{TA_4}}{TA_4}=1.$$

Unul dintre cele cinci poliedre regulate ale lui PLATON este tetraedrul şi de el s-a ocupat şi EUCLID în Elementele sale (în Cartea a XIII-a).

DEFINIŢIA 3.9 *Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numeşte tetraedru regulat.*

1. Tetraedrul regulat are toate feţele triunghiuri echilaterale congruente.
2. Înălţimea tetraedrului regulat cade în centrul feţei opuse, care este la intersecţia înălţimilor feţei.
3. Tetraedrul regulat are 4 înălţimi congruente.
4. Într-un tetraedru regulat unind centrele feţelor se obţine un nou tetraedru regulat.

Volumul tetraedrului regulat este

$$V=\frac{l^3\sqrt{2}}{12}. \tag{3.12}$$

3.2 Tetraedre Crelle

În general nu există o sferă care să fie tangentă la toate muchiile unui tetraedru (T). Cu toate acestea, pentru unele tetraedre particulare o astfel de sferă există.

TEOREMA 3.3 *(Teorema lui CRELLE) Fiind dat un tetraedru $ABCD$ există o sferă tangentă celor şase muchii ale tetraedrului, dacă şi numai dacă are loc condiţia:*

$$AB+CD=AC+BD=AD+BC.$$

Demonstraţie.

" $\Rightarrow$ " Implicaţia este evidentă datorită proprietăţii de congruenţă a tangentelor dintr-un punct exterior.

$\Leftarrow$ " Presupunem că este indeplinită condiţia:

$$AB+CD=AC+BD=AD+BC.$$

Rezultă:

$AC+AB-BC=AD+AB-BD$ şi $AB+BC-AC=BD+BC-CD$.

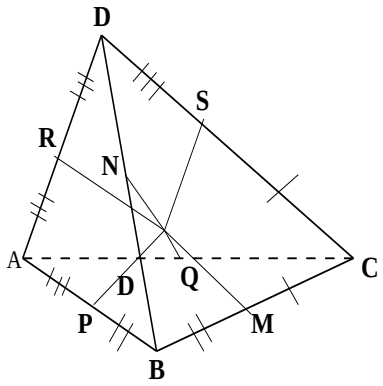

Figura 3.11: Teorema lui Crelle

Prima relaţie arată că cercul înscris în triunghiul ABC are punctul de contact cu AB identic cu punctul de contact al lui AB cu cercul înscris în triunghiul ABD. Deci există o sferă ce conţine cele două cercuri (înscris în ABC şi înscris in ABD). Există deci punctele M, N, O, P, Q în sfera care este tangentă segmentelor $[BC], [AC]$, $[AD], [BD], [AB]$. Se consideră planul (BDC) şi cercul de intersecţie determinat de plan şi sfera considerată. Relaţia a două dovedeşte că punctul de contact cu BC al cercului înscris în triunghiul BDC şi punctul de contact cu BC al cercului înscris în triunghiul ABC coincid.

Cum, cercul de intersecţie dintre planul BDC şi sfera este tangent muchiilor tetraedrului în P şi M, iar pe de alta parte prin P şi M trece cercul înscris în triunghiul BDC, rezulă că cercul de intersecţie dintre planul (BDC) şi sfera şi cercul înscris în triunghiul BDC coincid. Deci sfera este tangentă şi muchiei $[CD]$, ceea ce demonstrează teorema.

q.e.d.

DEFINIŢIA 3.10 *Tetraedrele cu proprietatea că există o sferă hexatangentă muchiilor se numesc* **tetraedre Crelle.**

Pentru tetraedrele Crelle se poate demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 3.4 *(Teorema lui Brianchon) Într-un tetraedru Crelle cele trei segmente ce unesc punctele de contact de pe muchiile opuse ale sferei hexatangente sunt concurente.*

Demonstraţie. Se foloseşte Teorema lui Menelaus în spaţiu pentru patrulaterul $ABCD$ şi rezultă că dreptele RC şi SM sunt coplanare, deci $RM \cap SP \neq \emptyset$.

Analog se arată că $NQ \cap SP \neq \emptyset$ şi $RM \cap NQ \neq \emptyset$.

Cum dreptele RM, SP, NQ nu pot fi coplanare rezultă că sunt concurente (Dacă în spaţiu trei drepte se intersectează două câte două, atunci ele sunt sau coplanare sau concurente).Să demonstrăm această proprietate.

Fie dreptele a, b şi c şi să presupunem că nu sunt concurente. Fie P planul determinat de dreptele a şi b. Cum dreapta c intersectează atât pe a cât şi pe b şi cele trei puncte de intersecţie sunt două câte două diferite, rezultă că dreapta c are două puncte diferite în planul P, deci este în întregime conţinută în acest plan. S-a demonstrat astfel ca dreptele a, b şi c sunt coplanare.

q.e.d.

PROPOZIŢIA 3.15 *Într-un tetraedru Crelle $ABCD$, unde $AB = c, AC = b$, $BC = a, AD + BC = s$, volumul V şi raza ρ a sferei hexatangente satisfac egalitatea:*

$$3V\rho = 2(s-p)(p-a)(p-b)(p-c).$$

3.3 Tetraedre echifaciale

În prima jumătate a secolului XIX o serie de geometrii străluciţi: Feuerbach, Vecten, Jacobi au stabilit multiple proprietăţi ale tetraedrului cu feţele congruente.

DEFINIŢIA 3.11 *(J. NEUBERG) Tetraedrul cu cele patru feţe tringhiuri cu aceeaşi arie se numeşte* **isoscel sau echifacial**

Tetraedrul echifacial are următoarele proprietăţi remarcabile:

1. Cele patru înalţimi ale tetraedrului echifacial sunt egale (A. SCHMIDT-1889).
   Demonstraţia este imediată, folosind formula volumului tetraedrului.
2. Perechile de muchii opuse sunt egale.
3. Bimedianele sunt ortogonale două câte două: adică ele determină un triedru tridreptunghic având originea în G, şi întâlnesc dreptele suport ale muchiilor tetraedrului sub unghiuri drepte (A. JACOBI).
4. Fiecare muchie este egal înclinată faţă de feţele neadiacente cu ea (A. JACOBI).
5. Bisectoarele unghiurilor sub care se vad din centrul de greutate două muchii opuse tetraedrului sunt bimedianele (J. NEUBERG).
6. Patru puncte remarcabile coincid, mai precis: centrul de greutate, punctul lui MONGE, centrul sferei circumscrise şi centrul sferei înscrise.

7. Suma algebrică a distanţelor unui punct arbitrar din spaţiu la feţele tetraedrului este constantă (A. JACOBI).

8. Volumul tetraedrului echifacial este egal cu a treia parte a produsului segmentelor bimediane (E. GENTY-1878).

9. Volumul tetraedrului echifacial este

$$V = \frac{\sqrt{2(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2+c^2)(-a^2+b^2+c^2)}}{12} \tag{3.13}$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor unei feţe a tetradrului.

10. Cele patru triedre ale tetraedrului sunt congruente, din această cauză suma diedrelor triedrelor este constantă.

11. Feţele sunt întotdeauna triunghiuri ascuţitunghice. (MORLEY).

12. Punctele de contact ale sferei înscrisă, în tetraedrul echifacial, cu feţele sunt centrele cercurilor circumscrise acestora (J. NEUBERG), iar punctele de contact interne ale feţelor cu sferele exînscrise sunt ortocentrele acestor feţe, iar punctele de contact interne ale feţelor cu sferele exânscrise sunt ortocentrele acestor feţe.

13. Există cinci sfere tangente la feţele tetraedrului; sfera înscrisă şi cele patru sfere exînscrise.

14. Centrele sferelor exînscrise sunt simetricele vârfurilor tetraedrului faţă de centrul sferei înscrise, din acest motiv, ele sunt vârfurile paralelipipedului circumscris tetraedrului (F. MORLEY-1894).

15. Sfera circumscrisă trece prin centrele celor patru sfere exînscrise (J. NEUBERG-1890).

16. Exista o sferă având centrul în G care este tangentă la înălţimile tetraedrului echifacial şi la perpendicularele ridicate pe fete în ortocentrele acestor feţe. (A. SCHMIDT-1889).

17. Există patru sfere exînscrise la muchiile unui tetraedru echifacial (G. RIBONI-1890).

Alte clase de tetraedre particulare sunt cele în care doar două feţe sunt egale, ori trei feţe egale, sau care au feţele egale două câte două. În acest din urma caz, există două bimediane care sunt în acelaşi timp şi perpedicularele comune ale muchiilor opuse corespunzătoare.

PROPOZIŢIA 3.16 *Un tetraedru echifacial care are o pereche de muchii opuse perpendiculare, este regulat.*

3.4 Tetraedre ortocentrice

În general o muchie a unui tetraedru $ABCD$ nu este perpendiculară pe muchia opusă; însă dacă una dintre muchii, de exemplu AB este perpendiculară pe CD, atunci înălţimile duse din vârfurile A şi B sunt coplanare, şi sunt de asemenea coplanare înălţimile coborâte din vârfurile C şi D, şi reciproc.

În anul 1827 geometrul elveţian Jacob Steiner a introdus noţiunea de tetraedru ortic sau ortocentric, care are cele patru înălţimi concurente.

DEFINIŢIA 3.12 *Un tetraedru care are perechile de muchii opuse ortogonale se numeşte* **tetraedru ortocentric**.

Suficienţa condiţiei de perpendicularitate pentru două perechi de muchii.

PROPOZIŢIA 3.17 *Dacă două perechi de muchii opuse ale unui tetraedru sunt perpendiculare, atunci şi muchiile rămase ale tetraedrului sunt de asemenea perpendiculare.*

Demonstraţie. Fie un tetraedru $ABCD$, cu $AB \perp CD, BC \perp AD$. Se duce $AE \perp CD, AF \perp BC$ (fig.3.12).

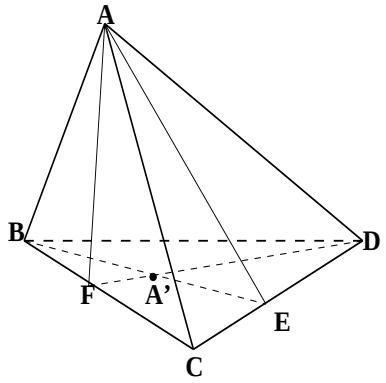

Figura 3.12: tetraedre ortocentrice

Rezultă $CD \perp (ABE)$, $BC \perp (ADF)$. Deci dacă $AA' = (ABE) \cap (ADF)$, atunci $AA' \perp (BCD)$ şi $AA' \perp BD$. Dar, $CA' \perp BD$, deci $BD \perp (ACA')$ şi $BD \perp AC$. **q.e.d.**

PROPOZIŢIA 3.18 *Înălţimile unui tetraedru sunt concurente într-un punct H dacă şi numai dacă tetraedrul este ortocentric.*

Demonstraţie. "$\Leftarrow$"

Presupunem ca tetraedrul $ABCD$ este ortocentric, cu $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$.

Atunci prin AB, AC, AD se pot duce plane perpendiculare pe CD, BD, BC. Aceste plane se vor intersecta după dreapta $AA' \perp (BCD)$.

A' este ortocentrul triunghiului BCD. Planul care conţine pe AB, perpendicular

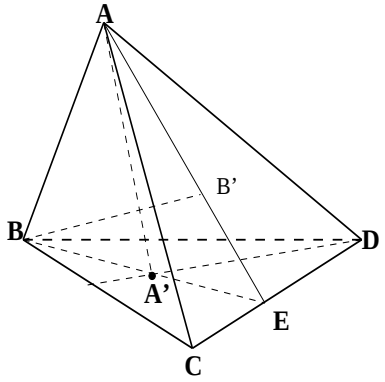

Figura 3.13:

pe CD se intersectează cu CD în E. AE este o înălţime a triunghiului ACD, BE o înălţime a triunghiului BCD.

Notăm cu B' ortocentrul triunghiului ACD. $BB' \perp (ACD)$. Dreptele AA' şi BB' fiind în ABE sunt concurente.

Două înălţimi oarecare ale tetraedrului ortocentric sunt concurente şi deoarece nu pot fi toate în acelaşi plan, trec toate prin acelaşi punct.

"$\Rightarrow$"

Presupunem că înălţimile tetraedrului $ABCD$ au punctul comun H.

$(A'HB') \perp CD$ şi $(A'HB') \cap CD = E$, astfel încât $BA'E$ şi $AB'E$ sunt înălţimi ale feţelor BCD, ACD. Rezultă că $ABE \perp CD$, deci $AB \perp CD$.

Analog se demonstrează şi perpendicularitatea celorlalte perechi de muchii opuse. Deci tetraedrul este ortocentric.

q.e.d.

DEFINIŢIA 3.13 *Punctul H de concurenţă al înălţimilor se numeşte ortocentrul tetraedrului.*

Un tetraedru ortocentric se bucură de proprietăţile următoare:

1. Picioarele înalţimilor sunt ortocentrele feţelor corespunzătoare.

2. Centrele de greutate ale fetelor sunt vârfurile unui tetraedru ortocentric, care este omotetic cu tetraedrul iniţial faţă de G; din această cauză perpendicularele ridicate pe feţele unui tetraedru ortocentric în centrele de greutate ale acestor feţe sunt concurente într-un punct H', care se gaseste pe dreapta GH, astfel încât $\overline{H'G} = \frac{1}{3}\overline{HG}$ (L. A. S. FERRIOT, 1811-1812).
3. Cele trei bimediane ale unui tetraedru ortocentric sunt egale, şi reciproc: un tetraedru care are bimedianele egale, este ortocentric.

   Mai precis, dacă într-un tetraedru

   - dacă cele trei bimediane sunt egale atunci cele patru înalţimi ale tetraedrului sunt concurente într-un acelaşi punct
   - dacă două bimediane sunt egale atunci două înalţimi sunt concurente într-un punct H_1 şi celelalte două înălţimi sunt concurente într-un alt punct H_2
   - dacă cele trei mediane au lungimi diferite atunci cele patru înălţimi sunt, două câte două, necoplanare. (H. GELLENTHIN, 1885).
4. Suma pătratelor a două muchii opuse este egală cu de patru ori pătratul distanţei dintre mijloacele a două muchii opuse. (K. W. FEUERBACH-1827).

   Din aceasta cauză, într-un tetraedru ortocentric $ABCD$ suma pătratelor muchiilor opuse este constantă,

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

5. Perpendiculara comună a perechilor de muchii opuse (axele tetraedrului) trec prin H; şi punctele lor de sprijin pe aceste muchii sunt picioarele înălţimilor feţelor tetraedrului (K. W. FEUERBACH-1827).
6. Ortocentrul împarte fiecare dintre aceste drepte (cele patru înalţimi şi cele trei axe) în două segmente al căror produs este constant (A. JACOBI).
7. Într-un tetraedru ortocentric produsul cosinuşilor a două diedre opuse este constant. (J. NEUBERG).
8. Vârfurile unui tetraedru ortocentric şi ortocentrul său determină un pentagon. Fiecare vârf al acestiu pentagon este ortocentrul tetraedrului determinat de celelalte patru vârfuri (pentagon ortocentric), (K. W. FEUERBACH-1827).
9. Într-un tetraedru ortocentric, mijloacele muchiilor şi picioarele înălţimilor feţelor sunt douăsprezece puncte care se găsesc pe aceeaşi sferă (prima sferă a celor douăsprezece puncte) având centrul în centrul de greutate al tetraedrului (H. VOGT-1881) şi raza egală cu jumătatea din lungimea unei bimediane.

10. Centrul de greutate al unui tetraedru ortocentric şi ortocentrele feţelor acestuia aparţin aceleiaşi sfere, a cărei rază este egală cu a treia parte a razei sferei circumscrise tetraedrului. Această sferă împarte segmentele înălţimilor cuprinse între vârfuri şi ortocentru în raportul $2 : 1$ (cea de-a două sferă a celor douăsprezece puncte sau sfera lui JACOBI).

11. Într-un tetraedru ortocentric mijloacele segmentelor înălţimilor cuprinse între vârfuri şi ortocentru aparţin unei sfere cu centrul în G, a cărei rază este egală cu jumătatea razei sferei circumscrise (A. JACOBI).

PROPOZIŢIA 3.19 *Orice tetraedru regulat este ortocentric.*

3.5 Probleme

1. Să se verifice că într-un tetraedru cu muchiile $AB \perp BD$ şi $AC \perp CD$, piciorul înălţimii din vârful A se află pe cercul circumscris triunghiului BCD.

   Indicaţie: Vârfurile tetraedrului se află pe sfera cu diametrul AD, care se intersectează cu planul BCD după un cerc.

2. Fie tetraedrul $ABCD$ şi a, b, c, d lungimile înălţimilor duse din vârfurile A, B, C, D; fie O un punct oarecare din interiorul tetraedrului, iar $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ distanţele punctului O la feţele BCD, CDA, DBA, ABC. Să se demonstreze:

$$\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \frac{\delta}{d} = 1.$$

3. Într-un tetraedru ortogonal $ABCD$ suma diedrelor şi a unghiurilor făcute de muchii cu feţele este egală cu 12 unghiuri drepte.

4. Fie $ABCD$ un tetraedru şi unghiul ϕ al dreptelor AC, BD. Să se verifice egalitatea:

$$2AC \cdot BD|\cos\phi| = |AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2|.$$

Capitolul 4

APLICAŢII ALE NUMERELOR COMPLEXE ÎN GEOMETRIE

4.1 Elemente de trigonometrie aplicate în geometrie

Geometria este una dintre ramurile matematicii în care trigonometria are aplicaţii imediate.

Aici vom reaminti câteva teoreme şi relaţii trigonometrice care folosesc la rezolvarea triunghiului şi vom prezenta unele aplicaţii practice ale trigonometriei in topografie.

Notăm cu a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC şi cu R raza cercului circumscris triunghiului.

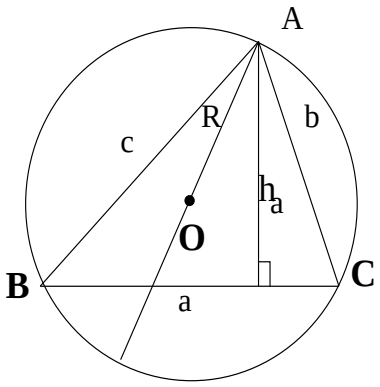

Figura 4.1: Triunghiul ABC

- Teorema sinusurilor

  În orice triunghi ABC are loc relaţia:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

- Teorema cosinusului

  În orice triunghi ABC are loc relaţia:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \tag{4.1}$$

Observaţia 4.1 *Din relaţia (4.1) se obţin:*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C.$$

- În orice triunghi ABC are loc relaţia:

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \tag{4.2}$$

  l_a fiind lungimea bisectoarei unghiului $\widehat{A}$.

În mod analog putem calcula lungimile bisectoarelor celorlalte două unghiuri ale triunghiului:

$$l_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}; \quad l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}.$$

- Formule de calcul pentru aria S unui triunghi oarecare ABC.

  1. $$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2},$$

     unde h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălţimilor corespunzătoarele laturilor a, b, respectiv c;

  2. $$S = \frac{ab\sin C}{2} = \frac{bc\sin A}{2} = \frac{ac\sin B}{2};$$

  3. $$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

     p fiind semiperimetrul triunghiului;

  4. $$S = \frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A} = \frac{b^2\sin A\sin C}{2\sin B} = \frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}$$

  5. $$S = rp$$

     r este raza cercului înscris în triunghi;

6.
$$S = \frac{abc}{4S};$$

7.
$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

4.1.1 Aplicaţii practice

- Distanţa dintre două puncte accesibile între care se află un obstacol.

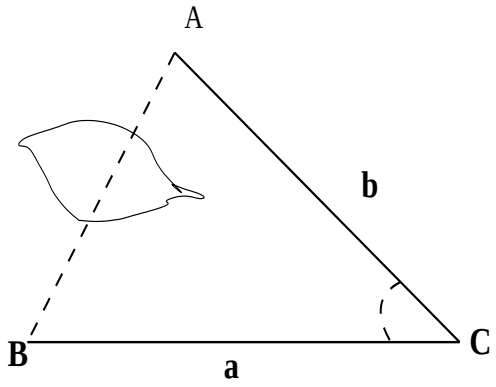

Figura 4.2:

Pentru a calcula distanţa de la A la B se alege un punct C din care se văd punctele A şi B. Prin măsurători se obţin numerele $AC = b$, $BC = a$, $m(\widehat{ACB}) = C$. Distanţa de la A la B se calculează folosind teorema cosinusului în triunghiul ABC:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

- Distanţa dintre două puncte inaaccesibile.

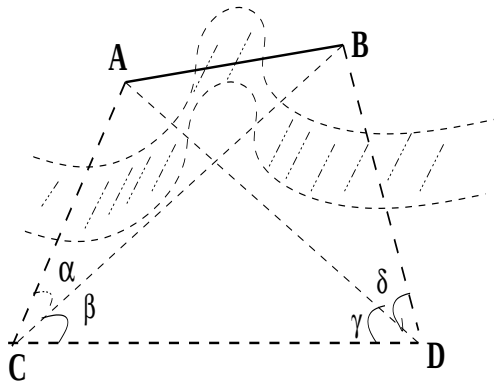

Figura 4.3:

Pentru a calcula distanţa de la A la B se aleg punctele C şi D din care se văd punctele A şi B astfel încât distanţa CD să se poată determina.

Prin măsurători se obţin numerele $CD = a, m(\widehat{ACB}) = \alpha$, $m(\widehat{BCD}) = \beta$, $m(\widehat{ADC}) = \gamma$, $m(\widehat{ADB}) = \delta$

Din triunghiurile BCD respectiv ACD se obţin:

$$BC = \frac{a\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}, \quad AC = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Distanţa dintre punctele inaccesibile A şi B se obţine din triunghiul ABC, cunoscându-i două laturi şi unghiul cuprins între ele.

- Determinarea înălţimii unui turn inaccesibil situat pe un deal.

Fie turnul marcat prin segmentul AB. Alegem un punct accesibil şi lucrăm în planul determinat de punctele A, B, C. Luând încă un punct accesibil $D \in BC$ şi notăm cu E punctul de intersecţie al verticalei prin A cu orizontala prin D. Prin măsurători se

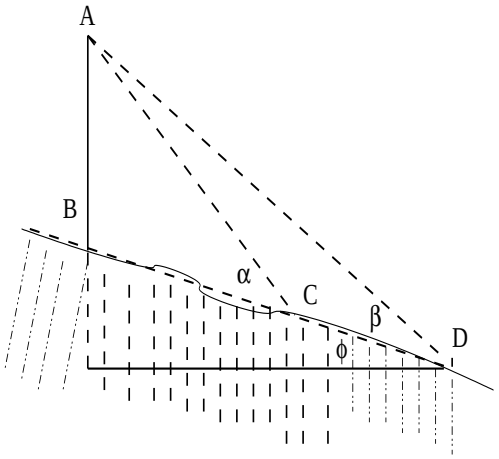

Figura 4.4:

obţin:

$$CD = a, m(\widehat{EDB}), m(\widehat{ADB}) = \beta, m(\widehat{ACB}) = \alpha.$$

În triunghiul ACD, avem

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Din triunghiul ABC se obţine

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin(\frac{\pi}{2}+\phi)}.$$

Aşadar

$$AB = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)\cos\phi}.$$

4.2 Numere complexe

Numerele complexe au fost introduse în matematică pentru a face posibilă rezolvarea unor ecuaţii de gradul al II-lea care nu admit rădăcini reale. S-a pornit de la ecuaţia $x^2 + 1 = 0$ care nu admite rădăcini reale.

În secolul al XVI-lea, Cardan utiliza în mod formal simbolul $\sqrt{-a}$ cu $a \in R, a\ 0$ pentru a descrie rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 10x + 40 = 0$ cu numerele $5 + \sqrt{-15}$ şi $5 - \sqrt{-15}$ numite numere imaginare.

Tot în secolul al $XVI-$lea, cu ocazia unor *turniruri ştiinţifice*, N. Fontana zis Tartaglia (1500-1557) găseşte formula de rezolvare a ecuaţiilor de gradul al III-lea care conduce către numere imaginare.

În secolul al XIX-lea, prin Gauss şi Cauchy, se reuşeşte o reprezentare a numerelor imaginare cu obiecte matematice cunoscute. Astfel, Gauss reprezinta numerele imaginare prin punctele unui plan în raport cu un reper ortonormat, foloseşte simbolul $\sqrt{-1} = i$ şi adoptă denumirea de număr complex. Cauchy observă că numerele complexe pot fi obţinute aplicând asupra numerelor reale şi a simbolului i, cu $i^2 = -1$, regulile de adunare şi înmulţire din R. Observă şi concluzionează că numerele complexe pot fi scrise sub forma $a + ib$ cu $a, b \in R$.

Descoperirea interpretării geometrice a numerelor complexe este legată de matematicienii K. Wessel (1745-1818), J.R. Argand (1768-1822) şi G. F. Gauss (1777-1855).

K. Wessel publică pentru prima dată o interpretare geometrică a numerelor complexe în 1799 la Copenhaga. Lucrarea sa a fost descoperită după o sută de ani. Geometrul francez J.R. Argand publică în 1806 *Essai sur une maniere de representer les quantites imaginaires* în care interpretarea geometrică a numerelor complexe este intens utilizată, demonstrând teorema fundamentalâ a algebrei. Mult timp, această lucrare a fost ignorată. După redescoperirea lucrării, în lumea matematică mondială devine preponderentă denumirea de diagramă Argand care se utilizează frecvent. În literatura de specialitate românească nu a fost precizată această denumire. La noi se utilizează termenul propus în 1821 la Ranchy: *afix al lui M(x,y) pentru numărul complex* $z = x + iy$.

Marele matematician G. F. Gauss conturează încă din 1799 interpretarea geometrică a numerelor complexe, iar în 1828 publică o teorie completă a numerelor complexe în care foloseşte diagrama Argand care este denumită şi *interpretarea lui Gauss*.

În ţara noastră Dimitrie Pompeiu (1873-1954) alături de Gheorghe Ţiţeica şi Traian Lalescu reprezintă marii matematicieni care s-au preocupat de geometrie, aplicând elemente de teoria numerelor complexe.

Problema

dacă ABC este un triunghi echilateral şi M un punct arbitrar în planul său, lungimile MA, MB, MC sunt laturile unui triunghi eventual degenerat

poartă numele lui Dimitrie Pompeiu. Acesta o demonstrează atât sintetic, cât şi utilizând operaţii cu numere complexe, realizând încă o dată legatura între geometrie şi algebră.

4.3 Aplicaţii ale numerelor complexe în geometrie

- Împărţirea unui segment într-un raport dat.

Fie A_1, A_2 puncte distincte din plan, de afixe z_1 şi respectiv z_2 şi fie P un punct pe dreapta A_1A_2, astfel încât $\overrightarrow{PA_1} = \lambda\overrightarrow{PA_2}$, unde $\lambda \in R, \lambda \neq 1$. Dacă P are afixul z_P, atunci:

$$z_P = \frac{1}{1-\lambda}z_1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}z_2.$$

Formula reprezintă afixul punctului care împarte un segment într-un raport dat.

Afixul mijlocului unui segment.

Dacă P este mijlocul segmentului $[A_1A_2]$, atunci $\lambda = -1$. Din formula precedentă se obţine:

$$z_P = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Patrulaterul $M_1M_2M_3M_4$, unde punctele M_i au afixele $z_i, i = \overline{1,4}$ este paralelogram dacă şi numai dacă

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_4.$$

- Centrul de greutate al unui triunghi.

Fie ABC un triunghi ale cărui vârfuri au afixele z_A, z_B, z_C. Atunci centrul de greutate G al triunghiului are afixul

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

- Distanţa dintre două puncte; ecuaţia cercului.

Dacă A_1, A_2 sunt puncte în plan de afixe z_1 şi respectiv z_2, atunci lungimea segmentului $[A_1A_2]$ este

$$|A_1A_2 = |z_1 - z_2|.$$

Rezultă că cercul de centru $A_0(z_0)$ şi rază r are ecuaţia

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z_0}) = 0.$$

- Condiţia de coliniaritate :

Punctele M_1, M_2, M_3 de afixe z_1, z_2 respectiv z_3 sunt coliniare dacă şi numai dacă există $k_1, k_2, k_3 \in R$ cu $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ şi $k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 = 0$.

Într-adevăr dacă M_1, M_2, M_3 sunt coliniare, atunci există $k \in R$ cu $\overrightarrow{M_2M_1} = k\overrightarrow{M_2M_3}$. Deci $z_2 = \dfrac{z_1 - kz_3}{1-k}$, adică $z_1 - (1-k)z_2 - kz_3 = 0$.

Pentru $k_1 = 1, k_2 = 1 - k, k_3 = -k$ obţinem concluzia.

Reciproc, din $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ cu $k_2 = -k_1 - k_3$ obţinem

$$k_1(z_1 - z_2) = -k_3(z_3 - z_2).$$

Pentru $k = -\dfrac{k_3}{k_1}$ obţinem $z_2 = \dfrac{z_1 - kz_3}{1-k}$, adică M_1, M_2, M_3 sunt coliniare.

- Măsurarea unghiului orientat.

Măsura unghiului orientat $\widehat{M_1OM_2}$, în sens trigonometric, (semidreapta OM_1 se roteşte în sens trigonometric peste semidreapta OM_2),faţă de un reper cu originea în O este:

$$m(\widehat{M_1OM_2}) = arg\frac{z_2}{z_1},$$

unde z_1, z_2 sunt afixele punctelor M_1, respectiv M_2.

Dacă punctele M_1, M_2, M_3 au afixe z_1, z_2 respectiv z_3, atunci măsura unghiului orientat (în sens trigonometric) $\widehat{M_1M_2M_3}$ este

$$m(\widehat{M_1M_2M_3}) = arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}.$$

Dacă punctele M_1, M_2, M_3 au afixe z_1, z_2, z_3 şi $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} = \rho\varepsilon$, unde $\rho > 0, \quad \varepsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$ cu $\alpha \in [0, 2\pi)$, atunci

$$\frac{M_2M_3}{M_1M_2} = \rho, \quad m(\widehat{M_1M_2M_3}) = min(\alpha, 2\pi - \alpha).$$

- Ecuaţia dreptei care trece prin două puncte.

Fie A_1, A_2, două puncte distincte din plan de afixe z_1, respectiv z_2. Atunci, dreapta A_1A_2 reprezintă mulţimea punctelor din plan ale căror afixe z sunt de forma:

$$z = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2, \lambda \in R.$$

O altă formă a ecuaţiei unei drepte în C.

Punctul P aparţine dreptei A_1A_2 dacă şi numai dacă afixul său z verifică egalitatea:

$$z - z_1 = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}(\bar{z} - \bar{z}_1).$$

- Unghiul a două drepte

Fie punctele M_1, M_2, M_3, M_4, distincte în plan, diferite de origine, cu afixele $z_i, i = \overline{1,4}$. Măsura unghiului orientat (în sens trigonometric) al dreptelor M_1M_2 şi M_3M_4 este:

$$m(M_1\widehat{M_2, M_3}M_4) = arg\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}.$$

COROLARUL 4.1 *Dreptele M_1M_2 şi M_3M_4 sunt:*

1. $M_1M_2 \perp M_3M_4$ *dacă şi numai dacă* $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in iR^*$;
2. $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ *dacă şi numai dacă* $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in R^*$.

- Punctele distincte M_1, M_2, M_3, M_4 sunt conciclice dacă şi numai dacă raportul anarmonic al afixelor lor este real, adică:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \in R^*.$$

- Ortocentrul unui triunghi.

Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc cu centrul în originea O a sistemului cartezian xOy. Înălţimile AA_1, BB_1 şi CC_1 ale triunghiului sunt concurente într-un punct H care îndeplineşte condiţia vectorială:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Dacă afixele vârfurilor triunghiului sunt z_1, z_2, z_3 pentru punctele A, B respectiv C atunci afixul ortocentrului este h şi este

$$h = z_1 + z_2 + z_3.$$

COROLARUL 4.2 *Dacă originea reperului cartezian nu este în centrul cercului circumscris triunghiului, atunci punctul O are afixul o şi are loc relaţia:*

$$h + 2o = z_1 + z_2 + z_3.$$

COROLARUL 4.3 *Faţă de un reper cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC, centrul cercului lui Euler are afixul:*

$$\omega = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2}.$$

- Centrul cercului înscris într-un triunghi

Fie ABC un triunghi ale cărui laturi BC, CA, AB au respectiv lungimile a, b, c. Centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC are afixul

$$z_I = \frac{1}{a+b+c}[az_A + bz_B + cz_C].$$

- Aria unui triunghi

Dacă $z_i, i = \overline{1,3}$ sunt afixele vârfurilor triunghiului ABC, notat în sens trigonometric, atunci aria triunghiului este:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}Im(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1).$$

Fără a restânge generalitatea problemei putem considera că originea sistemului orto-

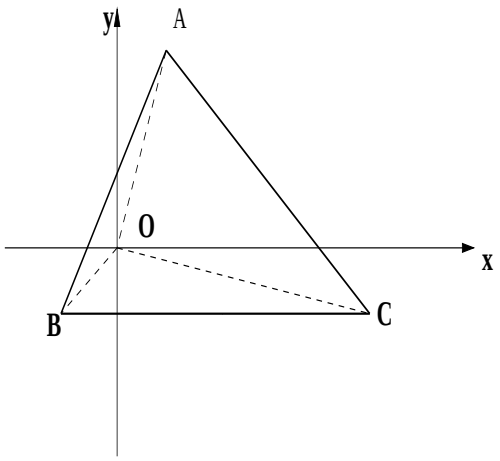

Figura 4.5:

gonal de axe se află în interiorul triunghiului. Folosind forma trigonometrică a celor 3 afixe:

$$z_i = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), i = \overline{1,3},$$

atunci:

$$\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1 = r_1r_2[\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)]+r_2r_3[\cos(\theta_3-\theta_2)+i\sin(\theta_3-\theta_2)]+$$

$$+r_1r_3[\cos(\theta_1-\theta_3)+i\sin(\theta_1-\theta_3)].$$

Calculăm

$$\frac{1}{2}Im(\overline{z_1}z_2 + \overline{z_2}z_3 + \overline{z_3}z_1) =$$

$$= \frac{1}{2}r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1) + \frac{1}{2}r_2r_3\sin(\theta_3-\theta_2) + \frac{1}{2}r_1r_3\sin(\theta_1-\theta_3) =$$

$$= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = S_{ABC}.$$

- Caracterizarea triunghiului dreptunghic.

Triunghiul ABC înscris în cercul $C(O,R)$ este dreptunghic dacă şi numai dacă $|a+b+c|=R$, unde $A(a), B(b), C(c)$.

Demonstraţie. Dacă triunghiul ABC este dreptunghic, cu unghiul drept în A, atunci B şi C sunt diametral opuse, deci $b=-c$, de unde $|a+b+c|=|a|=R$.

Reciproc, dacă $|a+b+c|=R$, atunci $|a+b+c|^2=R^2$, adică $(a+b+c)\left(\frac{R^2}{a}+\frac{R^2}{b}+\frac{R^2}{c}\right)=R^2$, deci

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$$

echivalent cu

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

adică două dintre punctele A, B, C sunt diametral opuse. **q.e.d.**

- Formula rotaţiei în complex

Dacă punctul $M_3(z_3)$ se obţine printr-o rotaţie cu centrul în $M_2(z_2)$ şi unghi $\alpha \in [0, 2\pi)$ a punctului $M_1(z_1)$, atunci:

$$z_3 = z_2 + (z_1 - z_2)\epsilon$$

unde $\epsilon = \cos\alpha + i\sin\alpha$ dacă rotaţia se efectuează în sens trigonometric sau $\epsilon = \cos(2\pi-\alpha) + i\sin(2\pi-\alpha)$, dacă rotaţia se efectuează în sens invers trigonometric

COROLARUL 4.4 *Triunghiul ABC este echilateral dacă şi numai dacă*

$$c = a + (b-a)\epsilon$$

unde $\epsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, dacă triunghiul ABC este orientat în sens trigonometric, sau $\epsilon = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$, dacă triunghiul ABC este orientat în sens invers trigonometric

4.4 Teoreme clasice de geometrie demonstrate cu ajutorul numerelor complexe

În cele ce urmează vom prezenta câteva proprietăţi ale punctului şi dreptei lui Nagel folosind numerele complexe. O prezentare sintetică a acestor rezultate a fost făcută în primul capitol.

Fie ABC un triunghi oarecare. Notăm cu A' mijlocul laturii (BC) şi cu D, D' punctele de contact ale acesteia cu cercurile înscris şi A-exânscris triunghiului dat. Pe laturile (CA) şi (AB) considerăm punctele B', E, E' şi respectiv C', F, F' cu semnificaţii analoage. Sunt cunoscute (sau se deduc uşor) următoarele relaţii:

$$BD' = p - c, D'C = p - b, CE' = p - a, E'A = p - c, AF' = p - b, F'B = p - a, \tag{4.3}$$

unde p este semiperimetrul triunghiului.

Notăm afixul unui punct X oarecare cu z_X.

PROPOZIŢIA 4.1 *Dreptele AD', BE', CF' sunt concurente într-un punct N cu afixul:*

$$z_N = \frac{1}{p}\left[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C\right]. \tag{4.4}$$

Demonstraţie.

Folosind (4.3) avem $k = \dfrac{BD'}{D'C} = \dfrac{p-c}{p-b}$, deci

$$z_{D'} = \frac{z_B + kz_C}{1+k} = \frac{1}{a}[(p-b)z_B + (p-c)z_C].$$

Se obţin formule similare pentru afixele punctelor E', F'. Fie V un punct pe segmentul (AD') determinat de raportul $v = \dfrac{AV}{VD'}$. Astfel

$$z_V = \frac{z_A + vz_{D'}}{1+v} = \frac{1}{1+v}\left[\frac{1}{p-a}z_A + \frac{v}{a}(p-b)z_B + \frac{v}{a}(p-c)z_C\right].$$

Vom obţine o formă simetrică pentru paranteza paranteza pătratălegând v astfel încât $\dfrac{1}{p-a} = \dfrac{v}{a}$, adică $v = \dfrac{a}{p-a}$. Atunci, punctul de pe AD' corespunzător acestei valori a lui v, punct pe care-l notăm cu N, va avea afixul $z_N = \frac{1}{p}[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C]$. Simetria acestei relaţii face evident faptul că punctul N este situat şi pe dreptele BE' şi CF'. **q.e.d.**

Punctul N pus în evidenţă de Propoziţia 4.1 este punctul lui Nagel.

PROPOZIŢIA 4.2 *Punctul lui Nagel are proprietăţile:*

1. $G \in (IN)$ *şi* $NG = 2GI$,
2. $NH \parallel OI$ *şi* $NH = 2OI$.

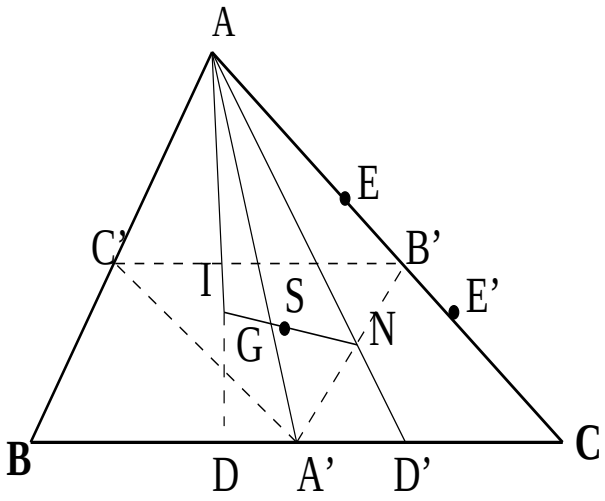

Figura 4.6:

Demonstraţie. 1)Pentru afixele centrului de greutate G al triunghiului şi al centrului cercului înscris în triunghi avem:

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}, \quad z_I = \frac{1}{2p}[az_A + bz_B + cz_C] \tag{4.5}$$

Din (4.4) şi (4.5) vom obţine:

$$\frac{z_G - z_I}{z_N - z_G} = \frac{\frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C) - \frac{1}{2p}(az_A + bz_B + cz_C)}{\frac{1}{p}\left[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C\right] - p(z_A + z_B + z_C)} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2p(z_A + z_B + z_C) - 3(az_A + bz_B + cz_C)}{3\left[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C\right] - p(z_A + z_B + z_C)} = \frac{1}{2},$$

deci $\dfrac{z_G - z_I}{z_N - z_G} = \dfrac{1}{2} \in R$, de unde rezultă că $G \in (IN)$ şi $|z_N - z_G| = 2|z_G - z_I|$, adică $NG = 2GI$.

2) Alegem un sistem de axe cu originea în O, centrul cercului circumscris triunghiului ABC. În acest caz ştim că $z_H = z_A + z_B + z_C$ şi vom avea

$$\frac{z_N - z_H}{z_I - z_O} = \frac{\frac{1}{p}\left[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C\right] - (z_A + z_B + z_C)}{\frac{1}{2p}(az_A + bz_B + cz_C)} = -2 \in R,$$

deci $NH \parallel OI$ şi $|z_N - z_H| = 2|z_I - z_O|$, adică $NH = 2OI$. **q.e.d.**

Dreapta IN se numeşte **dreapta lui Nagel**.

PROPOZIŢIA 4.3 *Cercul înscris în triunghiul median $A'B'C'$ are centrul în mijlocul S al segmentului (IN).*

Demonstraţie. Evident $B'C' = \frac{a}{2}, C'A' = \frac{b}{2}, A'B' = \frac{c}{2}$ şi $p' = \frac{1}{2}p'$, p' fiind semiperimetrul triunghiului median. Atunci afixul centrului cercului înscris în triunghiul median este:

$$z_{I'} = \frac{1}{2p'}\left(\frac{a}{2}z_{A'} + \frac{b}{2}z_{B'} + \frac{c}{2}z_{C'}\right) = \frac{1}{2p}\left[a\frac{z_B + z_C}{2} + b\frac{z_A + z_C}{2} + c\frac{z_B + z_A}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{4p}\left[(b+c)z_A + (a+c)z_B + (b+a)z_C\right]$$

Pe de altă parte

$$z_S = \frac{1}{2}(z_I + z_N) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2p}(az_A + bz_B + cz_C) + \frac{1}{p}\left[(p-a)z_A + (p-b)z_B + (p-c)z_C\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{4p}\left[(2p-a)z_A + (2p-b)z_B + (2p-c)z_C\right] = \frac{1}{4p}\left[(b+c)z_A + (a+c)z_B + (b+a)z_C\right]$$

Ca urmare, $z_{I'} = z_S$ şi deci I' coincide cu S. **q.e.d.**

Punctul S mijlocul segmentului (IN) se numeşte **punctul lui Spiecker**, iar cercul $C(S, \frac{r}{2})$ înscris în triunghiul median **cercul lui Spiecker**.

PROPOZIŢIA 4.4 *Centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC este punctul lui Nagel al triunghiului median $A'B'C'$.*

Demonstraţie. Pentru punctul lui Nagel N' al triunghiului $A'B'C'$ avem

$$z_{N'} = \frac{1}{p'}\left[(p'-a')z_{A'} + (p'-b')z_{B'} + (p'-c')z_{C'}\right] =$$

$$= \frac{1}{p}\left[(p-a)\frac{z_B + z_C}{2} + (p-b)\frac{z_A + z_C}{2} + (p-c)\frac{z_B + z_A}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2p}(az_A + bz_B + cz_C) = z_I,$$

deci N' coincide cu I. **q.e.d.**

4.5 Probleme

1. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater inscriptibil. Se notează cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$. Să se arate că patrulaterele $A_1A_2A_3A_4$ şi $H_1H_2H_3H_4$ sunt congruente.

2. Dacă pe laturile unui patrulater oarecare $ABCD$ construim în exterior pătrate de centre O_1, O_2, O_3, O_4 , atunci dreptele O_1O_3 şi O_2O_4 sunt perpendiculare.

3. Pe laturile patrulaterului convex $ABCD$ se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP, DAQ. Să se arate că patrulaterele $ABCD$ şi $MNPQ$ au acelaşi centru de greutate.

Bibliografie

[1] Dan Brânzei, Sebastian Aniţa, Eugen Onofraş, Gheorghe Isvoraanu, Bazele raţionamentului geometric, Editura Academiei RSR, 1983;

[2] Dan Brânzei, Sebastian Aniţa, Constantin Cocea, Planul şi spaţiul euclidian, Editura Academiei RSR, 1986;

[3] Ion Chiţescu, Marcel Chiriţă, Geometria patrulaterului, Editura Teora, 1998;

[4] Traian Lalescu, Geometria triunghiului, Editura Apollo, Craiova 1993;

[5] Liviu Nicolescu, Vladimir Broskov, Probleme practice de geometrie, Editura Tehnica, Bucuresti, 1990